**Circuitos Elétricos I**

**(https://sites.google.com/a/dee.ufcg.edu.br/aco/ufcg/downloads/circuitos-i)**

**## Grandezas Tensão e Corrente**

Definições:

a) Cargas elétricas

a.1) Bipolares

a.1.1) Positivas;

a.1.2) Negativas;

a.2) Múltiplos inteiros da carga do elétron: 1,6022 x 10-19 C;

a.3) Efeitos elétricos estão associados à separação de cargas elétricas (tensão – V) e ao seu movimento (corrente – A);

b) Tensão: Para separar cargas de sinais contrários é necessária uma certa energia. A tensão, cuja unidade é o VOLT (V), representa a energia por unidade de carga usada para separar cargas de sinais opostos.

(Volt) onde: = tensão em Volts (V);

= energia em Joules (J);

= carga em Coulomb (C).

c) Corrente: Quantidade de cargas que atravessam um elemento por unidade de tempo. Unidade – AMPERE (A)

(Ampere) onde: = corrente em Amperes (A);

= carga em Coulomb (C);

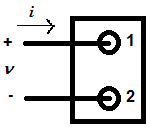
= tempo em segundo (s).

# Elemento Básico Ideal

Características: a) Possui apenas dois terminais;

b) Pode ser descrito matematicamente em termos da corrente e/ou tensão;

c) Não pode ser subdividido em outros elementos.

 Elemento básico

# Sentido convencional de corrente – Deslocamento de cargas positivas (adotado)

# Sentido real de corrente – Deslocamento de elétrons (cargas negativas)

# Convenção Passiva

Se o sentido de referência para a corrente em um elemento for o mesmo que o da queda de tensão no mesmo elemento, deve ser usado um sinal positivo na expressão que relaciona tensão (*v*) e corrente (*i*). Se não, deve ser usado um sinal negativo.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Valor Positivo |  | Valor Negativo |
| *v* | queda de tensão do terminal 1 para o terminal 2  ou  aumento de tensão do terminal 2 para o terminal 1 | *v* | aumento de tensão do terminal 1 para o terminal 2  ou  queda de tensão do terminal 2 para o terminal 1 |
| *i* | movimento de cargas positivas do terminal 1 para o terminal 2  ou  movimento de cargas negativas do terminal 2 para o terminal 1 | *i* | movimento de cargas positivas terminal 2 para o terminal 1  ou  movimento de cargas negativas terminal 1 para o terminal 2 |

#Potência e Energia

\* Potência – Taxa de variação de energia por unidade de tempo. Unidade – Watt (W)

(volt) onde: = potência em Watts (W);

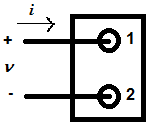
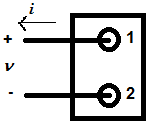
= energia em Joule (J);

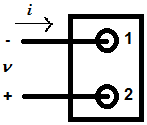
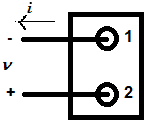
= tempo em segundo (s);

1Watt =

associada a uma corrente elétrica, temos:

# Polaridades de referência e expressões de potência para um elemento ideal de dois terminais

 (a) (b)

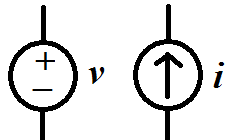
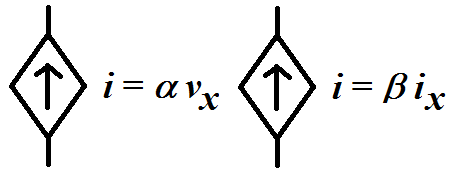
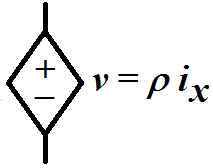
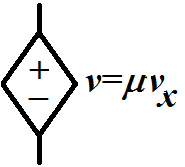
(c) (d)

**## Fontes de Tensão e Corrente**

* Fonte ideal de tensão: mantém uma tensão constante entre seus terminais, qualquer que seja a corrente que a atravessa;
* Fonte ideal de corrente: Mantém uma corrente constante aplicada ao ramo do circuito onde esteja conectada, independente da tensão que se estabelece entre os seus terminais;
* Fonte independente: Estabelece uma tensão ou uma corrente em um circuito, independentemente do valor de tensão ou corrente em outras partes do circuito;
* Fonte dependente ou controlada: A tensão estabelecida por uma fonte de tensão ou fonte de corrente dependente é função, ou seja, depende de uma corrente em um ramo do circuito ou de uma tensão entre dois nós quaisquer do circuito.

# Representação

Fontes independentes Fontes dependentes

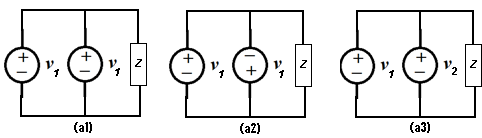
 

#Elementos: Ativos – Dispositivo capaz de gerar energia;

Passivo – Dispositivo que não gera energia, em geral, consome ou armazena energia.

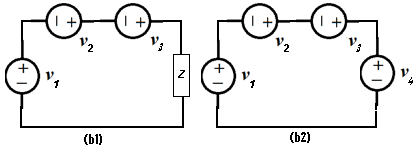
# Conexão entre fontes de tensão e/ou corrente – Condições

1. Duas fontes de tensão ideais e independentes só podem ser ligadas em paralelo se a amplitude da tensão e as polaridades de ambas as fontes são estritamente iguais;



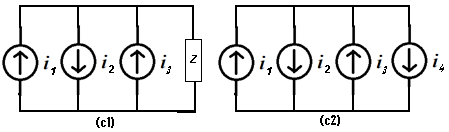
(a1) – Permissível, (a2) – Não permissível e (a3) – Não permissível se *v1*≠*v2*

1. Duas ou mais fontes de tensão ideais e independentes podem ser ligadas em série sem qualquer restrição. No entanto, se em uma malha só houver fontes de tensão, como mostrado na figura (b2), o somatório das tensões das mesmas deverá respeitar a Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), ou seja, a soma das tensões em uma malha qualquer é nula;



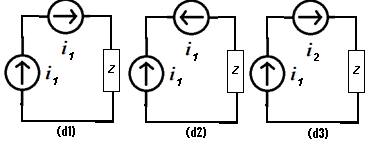
(b1) – Permissível sem qualquer condição para *v1*, *v2 e v3* e (b2) – Permissível desde que (LKT)

1. Duas ou mais fontes de corrente ideais e independentes podem ser ligadas em paralelo sem qualquer restrição. No entanto, quando só existir fontes independentes de corrente conectadas em paralelo, como mostrado na figura (c2), o somatório das correntes das fontes deverá respeitar a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC), ou seja, a soma das correntes em um mesmo nó é nula;



(c1) – Permissível sem qualquer condição para *i1*, *i2 e i3* e (b2) – Permissível desde que (LKC)

1. Duas fontes de corrente ideais e independentes só podem ser ligadas em série se a amplitude da corrente e o sentido de ambas as fontes são estritamente iguais;



(d1) – Permissível, (d2) – Não permissível e (d3) – Não permissível se *i1*≠*i2*

1. Uma fonte de tensão ideal e independente e uma fonte de corrente ideal e independente, podem ser conectadas em paralelo ou em série, sem qualquer restrição.

Obs: A conexão entre fontes de tensão dependentes, de corrente e tensão, seguem as mesmas condições observadas para as fontes ideais e independentes.

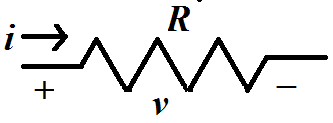
**## Resistência Elétrica – Lei de Ohm**

Resistência – Propriedade dos materiais que indica o nível de oposição que os mesmos oferecem à circulação de cargas elétricas (corrente = cargas elétricas em movimento

).

Unidade da resistência – OHM (Ω)

\* Convenção para representação do sentido de corrente em um resistor

 Sentido associado *corrente x tensão* em um resistor – A corrente entra no terminal indicado pelo potencial mais positivo (+). Justificativa: Como o resistor é um elemento consumidor de energia, pode-se associar os sinais de polaridade indicados no seu símbolo ao fato de que após passar pelo resistor as cargas perdem energia potencial, que se transforma em outras formas de energia, como calor, por exemplo, implicando que as mesmas saem do resistor com menos energia potencial. Assim, na entrada como a energia potencial é maior do que na saída, indica-se este fato colocando um sinal (+) no terminal onde as cargas entram e um sinal (-) onde as cargas saem.

# Resistor Ideal → Resistência independe de corrente e/ou temperatura, além de não variar com o tempo.

# Cálculo de Potência a partir da resistência:

# Condutância → Inverso da resistência => , onde R= reistência

Unidade de Condutância: Siemens

# Cálculo de Potência a partir da condutância:

**## Leis de Kirchhoff**

**# Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC)**: A soma algébrica das correntes em qualquer nó de um circuito é sempre nula. Justificativa: Em um nó, onde há a conexão de dois ou mais elementos de circuito, não há consumo ou geração de cargas, logo, a soma das cargas que chegam a um nó deverá ser igual a soma das cargas que saem do nó, resultando um resíduo nulo de cargas no nó.

Convenção: Corrente que entra no nó positiva (+). Corrente que sai do nó negativa (-);

ou

Corrente que entra no nó negativa (-). Corrente que sai do nó positiva (+);

Observações:

* A LKC impõem uma dependência linear entre as correntes de braço (equações algébricas lineares e homogêneas a coeficientes constantes);
* A LKC aplica-se a qualquer circuito elétrico a parâmetros concentrados;
* A LKC afirma que as cargas não podem se acumular em nenhum nó (conservação de cargas em todos os nós);
* Em qualquer circuito com *“n”* a LKC permite obter *“n-1”* equações linearmente independentes.

**# Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT)**: A soma algébrica das tensões em qualquer malha de um circuito é sempre nula. Justificativa:.

Convenção: Queda de tensão positiva (+). Aumento de tensão negativo (-);

ou

Queda de tensão negativa (-). Aumento de tensão positiv0 (+);

Observações:

* A LKC impõem uma dependência linear entre as tensões de braço (segmento de circuito compreendido entre dois nós consecutivos, onde se encontra um ou mais elementos conectados em paralelo) de um percurso fechado;
* A LKT aplica-se a qualquer circuito elétrico a parâmetros concentrados.

# O tipo de ligação entre os elementos impõem restrições as grandezas elétricas observadas sobre esses elementos, tais como :

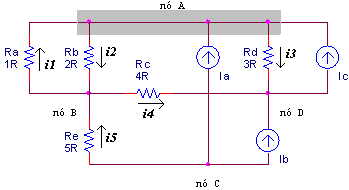
* O conhecimento do valor da resistência de um resistor e o conhecimento da corrente que o atravessa permite determinar a tensão sobre o mesmo a partir da aplicação da Lei de Ohm. Em geral, o conhecimento da corrente em um elemento passivo permite determinar a tensão sobre o mesmo;
* De acordo com a Lei de Kirchhoff das Correntes, quando apenas dois elementos estão conectados a um mesmo nó, o conhecimento da corrente em um dos elementos permite determinar a corrente que atravessa o outro elemento, a qual será a mesma.

# Uso da lei de Ohm e das Leis de Kirchhoff

As Leis de Kirchhoff, juntamente com a lei de Ohm, permitem desenvolver conjunto de equações que modelam circuitos elétricos e através dos quais torna-se possível determinar o valor de grandezas elétricas, como corrente e tensão, dos elementos do circuito. Para determinação das equações de modelagem de um circuito é necessário definir a priori sentidos de corrente em ramos do circuito, bem como, polaridades de tensão sobre os componentes do mesmo. Apesar dessa escolha poder ser arbitraria, seguir algumas convenções, como o sentido associado de corrente e tensão sobre resistores, por exemplo, pode simplificar os passos subseqüentes das análises.

Exemplos:

a)



Aplicação da Lei de Kirchhoff das correntes aos nós A, B, C e D. Convenção: corrente entrando no nó +.

nó A:

nó B:

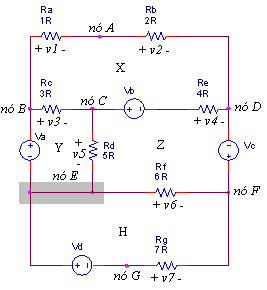
nó C:

nó D:

Observe que qualquer das equações acima poderá ser obtida por uma combinação linear das outras três. Por exemplo:

nó D: é combinação linear das equações dos nós A, B, e C, como indicado a seguir:

b)



Aplicação da Lei de Kirchhoff de Tensão as malhas X, Y , Z e H. Convenção: sentido horário e queda de tensão positiva.

Malha X: ;

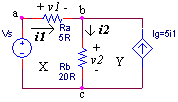
Malha Y:;

Malha Z: ;

Malha H:.

As quatro equações acima são linearmente independentes, visto que elas foram obtidas para malha que não contém nenhuma outra malha em seu interior, sendo este tipo de malha denominado de **Malha Simples.**

c)



Aplicação as leis de Kirchhoff aos nós e malhas do circuito, temos:

nó b:

utilizando a relação definida pela fonte dependente, temos:

malha X:

Aplicando a lei de Ohm ,temos:

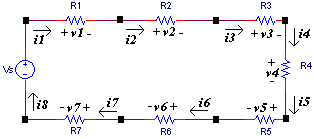
Malha X:

Dessa forma, obtém-se um sistema com duas equações para determinação das duas incógnitas *i1 e i2*:

, onde *vs* é um termo conhecido.

**## Circuitos resistivos Simples**

**# Ligação Série**



No circuito acima, observemos a ligação dos terminais da fonte de tensão ideal *vs* ao circuito. Nota-se que um dos terminais da fonte está ligado a um terminal do resistor R1 e outro terminal da fonte está ligado a um dos terminais do resistor R7. Observado isso, podemos concluir que a fonte de tensão está ligada em série com os resistores R1 e R7. Ao analisar as conexões dos outros elementos, observa-se que o mesmo tipo de ligação é encontrado, logo, podemos concluir que todos os elementos desse circuito estão ligados em série.

A conexão série se caracteriza pela conexão em um nó de apenas dois elementos, fato observado no circuito acima. Se analisarmos as correntes indicadas no circuito, através da LKC, e notando que cada ponto “” representa um nó, obtemos o seguinte conjunto de equações:

Logo, concluímos das igualdades que:

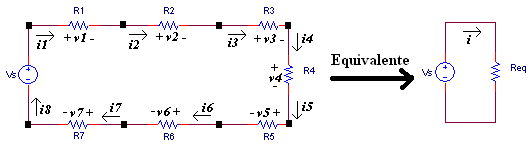
Analisando o circuito através da LKT, obtemos o seguinte conjunto de equações (adotando-se um sentido horário e considerando queda de tensão positiva):

logo

substituindo os termos *vi*, com i=1,2,...,7, pelos respectivos valores calculados através da lei de Ohm, temos:

Observa-se por esta equação que a tensão da fonte é dividida entre as resistência e, além disso, o termo de tensão de cada resistência é diretamente proporcional ao seu valor. Isolando a corrente, obtemos a seguinte equação:

Esta equação indica que se tivermos um circuito constituído por um único resistor e se o mesmo tiver um valor EQUIVALENTE igual a soma das resistências de todos os resistores do circuito série original, neste circuito equivalente circulará uma corrente *“i”*, cujo valor e sentido será EXATAMENTE igual a da corrente do circuito série original, quando o mesmo é alimentado por uma fonte de tensão *“vs”*, com polaridade e amplitude iguais ao do circuito série original. Ou seja:



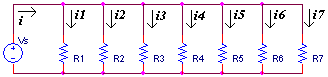
onde:

De uma forma geral podemos estabelecer que para qualquer circuito em que haja *“n”* resistores ligados em série, temos:

Observações:

1. Um circuito série pode ser caracterizado como um circuito em que a corrente que atravessa todos os elementos do circuito é exatamente a mesma em amplitude e sentido;
2. Numa associação série de resistores, o resistor equivalente *Req* será sempre maior que o maior dos resistores conectados em série.

**# Ligação Paralela**



No circuito acima, observemos a ligação dos terminais da fonte de tensão ideal *vs* ao circuito. Nota-se que um dos terminais da fonte está ligado a um dos terminais de todos os resistores de R1 a R7 e o outro terminal da fonte está ligado, da mesma forma, a um dos terminais de todos os resistores de R1 a R7. Observado isso, podemos concluir que a fonte de tensão está ligada em paralelo com os resistores R1, R2, ..., R7. Ao analisar as conexões dos outros elementos, observa-se que o mesmo tipo de ligação é encontrado, logo, podemos concluir que todos os elementos desse circuito estão ligados em paralelo.

A conexão paralela se caracteriza pela conexão em um nó de três ou mais elementos, fato observado no circuito acima. Como cada resistor da associação de resistores mostrada no circuito acima está diretamente ligado aos terminais da fonte de tensão ideal e como esta impõe a tensão entre seus terminais, a tensão em todos os resistores é igual a da fonte.

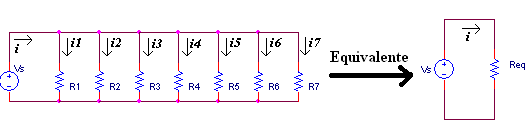
Analisando o circuito através da LKC, obtemos a seguinte equação (considerando a corrente entrando no nó, positiva):

logo

substituindo os termos *ij*, com j=1,2,...,7, pelos respectivos valores calculados através da lei de Ohm, temos:

Observa-se por esta equação que a corrente fornecida pela fonte é dividida entre as resistência e, além disso, a corrente em cada resistência é diretamente proporcional ao inverso do seu valor. Isolando a tensão, obtemos a seguinte equação:

Esta equação indica que se tivermos um circuito constituído por um único resistor e se o valor do inverso da resistência desse for EQUIVALENTE a soma do inverso das resistências de todos os resistores do circuito paralelo original, neste circuito equivalente circulará uma corrente *“i”*, cujo valor e sentido será EXATAMENTE igual a da corrente do circuito paralelo original, quando o mesmo é alimentado por uma fonte de tensão *“vs”*, com polaridade e amplitude iguais ao do circuito paralelo original, ou seja:



onde:

De uma forma geral podemos estabelecer que para qualquer circuito em que haja *“n”* resistores ligados em paralelo, temos:

Se utilizarmos a condutância, podemos reescrever a equação do *Req* da forma: , onde .

Observações:

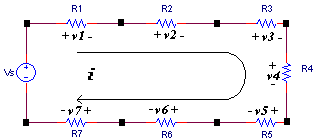
1. Um circuito paralelo pode ser caracterizado como um circuito em que a tensão aplicada aos terminais de todos os elementos do circuito é exatamente a mesma em amplitude e polaridade;
2. Numa associação paralela de resistores, o resistor equivalente *Req* será sempre menor do que o menor dos resistores conectados em paralelo. Essa afirmação pode ser confirmada pelo fato de que a condutância equivalente é maior do que a condutância individual de cada ramo resistivo do circuito, dado que a condutância equivalente é a soma dessas condutâncias individuais. Como maior condutância implica menor resistência, então confirma-se a afirmação inicial.

**# Circuito Divisor de Tensão**

Como observado no circuito resistivo série, a tensão da fonte é dividida entre os resistores da associação de resistores, dessa forma, o circuito também pode ser denominado de **“Circuito Divisor de Tensão”**. Deve-se observar que para isto ocorrer a corrente que atravessa os elementos do circuito divisor de tensão deverá ser a mesma.

Para determinação da tensão em qualquer dos resistores de um circuito série (ou divisor de tensão), não é necessário conhecer a corrente que circula pelos resistores associados em série, basta que se conheça a tensão e os valores de resistência, como será demonstrado a seguir.

Considere o circuito abaixo



Da análise previa, temos que a corrente *“i”* que circula em todos os resistores é dada por:

,

assim, se pretendemos determinar o valor da tensão sobre o resistor *R1*, *v1*, a mesma será determinada por:

,

seguindo o mesmo raciocínio, a tensão em qualquer dos resistores será dada por:

, onde no nosso exemplo, j=1,2,3,....,7.

No caso geral, em uma associação de *“n”* resistores ligados em série, a tensão em um elemento é dada por:

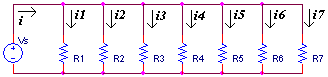
, onde *“vs”* é a tensão aplicada sobre a associação de resistores conectados em série.

**# Circuito Divisor de Corrente**

Como observado no circuito resistivo paralelo, a corrente fornecida pela fonte de tensão é dividida entre os resistores da associação de resistores, dessa forma, o circuito também pode ser denominado de **“Circuito Divisor de Corrente”**. Deve-se observar que para isto ocorrer, a tensão entre os terminais de todos os elementos do circuito divisor de corrente deverá ser a mesma.

Para determinação da corrente em qualquer dos resistores de um circuito paralelo (ou divisor de corrente), não é necessário conhecer a tensão aplicada aos resistores em paralelo, basta que se conheça a corrente total e os valores de resistência, como será demonstrado a seguir.

Considere o circuito abaixo



Da análise previa, temos que a corrente total *“i”*, fornecida pela fonte, é dada por: ,

assim, se pretendemos determinar o valor da corrente no ramo do *R1*, *i1*, a mesma será determinada por:

, obtida a partir da equação anterior.

Escrevendo em termos das condutâncias,temos:

No caso geral, em uma associação de *“n”* resistores ligados em paralelo, a corrente em um elemento é dada por:

, onde *“i”* é a corrente total aplicada fornecida pela fonte ao circuito formado pelos resistores conectados em série.

**# Medição de Tensão**

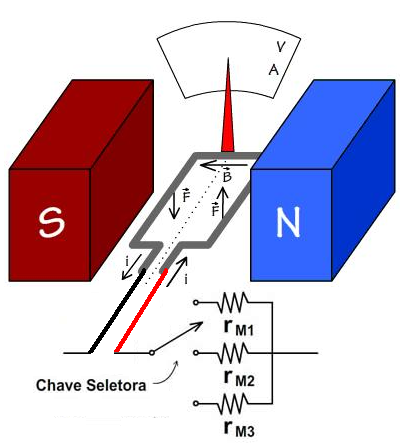
A medição de tensão é realizada por instrumentos denominados de Voltímetros. Os instrumentos analógicos, construídos a partir de um galvanômetro, indicado na figura abaixo, fazem uso do conceito de divisão de tensão, de modo a possibilitar a medição de tensão, em várias escalas distintas, usando o mesmo galvanômetro, como será discutido a seguir.

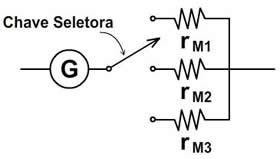
O galvanômetro pode ser representado eletricamente como um galvanômetro perfeito em série com uma resistência *rg*, como indicado abaixo:

galvanometro

Em geral sua especificação é dada em termos de uma corrente máxima suportada, que desenvolverá uma tensão nos terminais do galvanômetro, dada por: .

Na montagem de um voltímetro com múltiplas escalas de tensão, usando um galvanômetro com uma corrente nominal *“ig”* e uma tensão nominal *“vg”*, será necessário garantir que para a máxima tensão de cada escala (fundo de escala), a tensão sobre o galvanômetro seja *“vg”*, logo, será necessário usar um circuito divisor de tensão, como o mostrado na figura ao lado. Para cada escala, deve-se calcular um





resistor *“rMi*”, o qual suportará na condição de fundo de escala, a diferença de tensão entre a tensão *“vg”* e a tensão sendo medida.

**Exemplo:** Projetar um voltímetro com três escalas de tensão 1V, 10V, 100V, utilizando um galvanômetro cujas características são: *vg*=0.5V e *i*=10mA.

Solução: O Projeto consiste em determinar as três resistências *rM1*, *rM2* e *rM3*, como indicadas nas figuras acima, para cada tensão.

Os valores das resistências são determinados considerando a situação em que os valores máximos de tensão de cada escala são aplicados ao circuito formado pelo galvanômetro e resistor *rMi*.

Define-se *rM1*, como o resistor para a escala de tensão de 1V, *rM2*, para a escala de 10V e *rM3* para a escala de 100V. Deve ser observado que quando tivermos aplicado 1V, 10V ou 100V, para o voltímetro ajustado na escala de 1V, 10V ou 100V, respectivamente, o ponteiro do instrumento deverá apresentar a maior deflexão, que corresponde a corrente nominal *“ig”* passando pela bobina do galvanômetro. A partir das informações anteriores pode-se determinar os valores de *rM1*, *rM2* e *rM3*, como a seguir:

Para 1V: ;

Para 10V: ;

Para 100V: .

De forma geral, para uma tensão de fundo de escala de *“vfe”* volts e um galvanômetro com corrente nominal *“i”* e tensão nominal *“vg”*, o valor da resistência série *“rMi”* a ser associada ao galvanômetro para medição de uma tensão de até *“vfe”* volts, será:

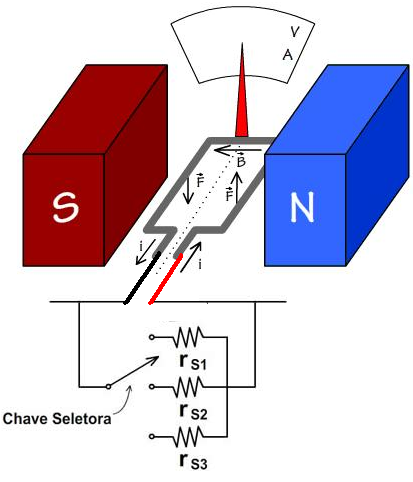
**# Medição de Corrente**

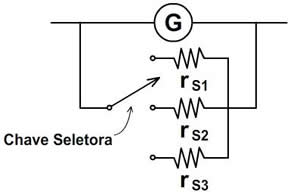
A medição de corrente é realizada por instrumentos denominados de Amperímetros, Os instrumentos analógicos, construídos a partir de um galvanômetro, indicado na figura abaixo, fazem uso do conceito de divisão de corrente, de modo a possibilitar a medição de correntes, em várias escalas distintas, usando o mesmo galvanômetro, como será discutido a seguir.

Na montagem de um amperímetro com múltiplas escalas de corrente, usando um galvanômetro com uma corrente nominal *“ig”* e uma tensão nominal *“vg”*, será necessário garantir que para a máxima corrente de cada escala (fundo de escala), a corrente que passa pelo galvanômetro seja *“i”*, logo, será necessário usar um circuito divisor de corrente, como o mostrado na figura ao lado. Para cada escala, deve-se calcular um resistor *“rsi*”, pelo qual passará, na condição de fundo de escala, a diferença de corrente entre a corrente do galvanômetro *“i”* e a corrente sendo medida.

**Exemplo:** Projetar um amperímetro com três escalas de corrente 1A, 10A, 100A, utilizando um galvanômetro cujas características são: *vg*=0.5V e *i*=10mA.

Solução: O Projeto consiste em determinar as três resistências *rs1*, *rs2* e *rs3*, como indicadas nas figuras ao lado, para cada corrente.





Os valores das resistências são determinados considerando a situação em que os valores máximos de corrente de cada escala são aplicados ao circuito formado pelo galvanômetro e resistor *rsi*.

Define-se *rs1*, como o resistor para a escala de corrente de 1A, *rs2*, para a escala de 10A e *rs3* para a escala de 100A. Deve ser observado que quando tivermos aplicado 1A, 10A ou 100A, para o amperímetro ajustado na escala de 1A, 10A ou 100A, respectivamente, o ponteiro do instrumento deverá apresentar a maior deflexão, que corresponde a corrente nominal *“ig”* passando pela bobina do galvanômetro. A partir das informações anteriores pode-se determinar os valores de *rs1*, *rs2* e *rs3*, como a seguir:

Para 1A: ;

Para 10A: ;

Para 100A: .

De forma geral, para uma corrente de fundo de escala de *“ife”* Amperes e um galvanômetro com corrente nominal *“i”* e tensão nominal *“vg”*, o valor da resistência paralela (“shunt”) *“rsi”* a ser associada ao galvanômetro para medição de uma corrente de até *“ife”* Amperes, será:

**## Ponte de Wheatstone**

A ponte de Wheatstone, mostrada na figura abaixo, encontra aplicação em circuitos para medição de resistência, pontes de “strain-gauge” e outros. Seu princípio de operação está associado a condição de equilíbrio da ponte formada pelos resistores R1, R2, R3 e Rx, que quando atingida, faz com que a diferença de tensão entre os nós “C” e “B” seja nula, por conseguinte, a corrente no ramo entre os dois nós citados será nula. Observe que há um voltímetro conectado entre os nós “C” e “B”, que serve para indicar quando o equilíbrio da ponte foi atingido, onde, a tensão medida será nula.

Análise da Ponte de Wheatstone na condição de equilíbrio:

isso implica que:

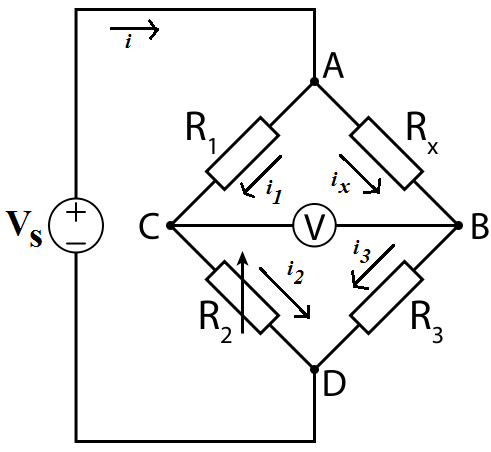
e , também e

Calculando os termos de tensão, temos:

e , logo

e , como , então

a partir da relação das resistências, indicada acima, é possível determinar o valor de um resistência desconhecida *Rx*.

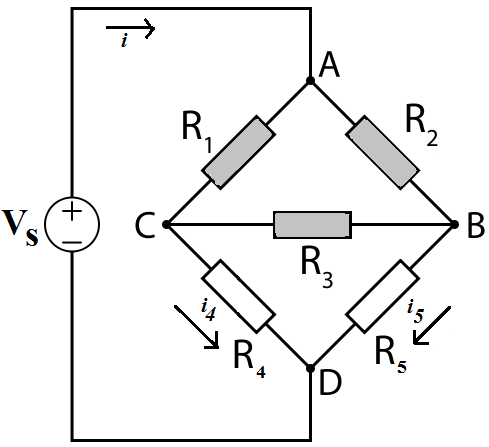


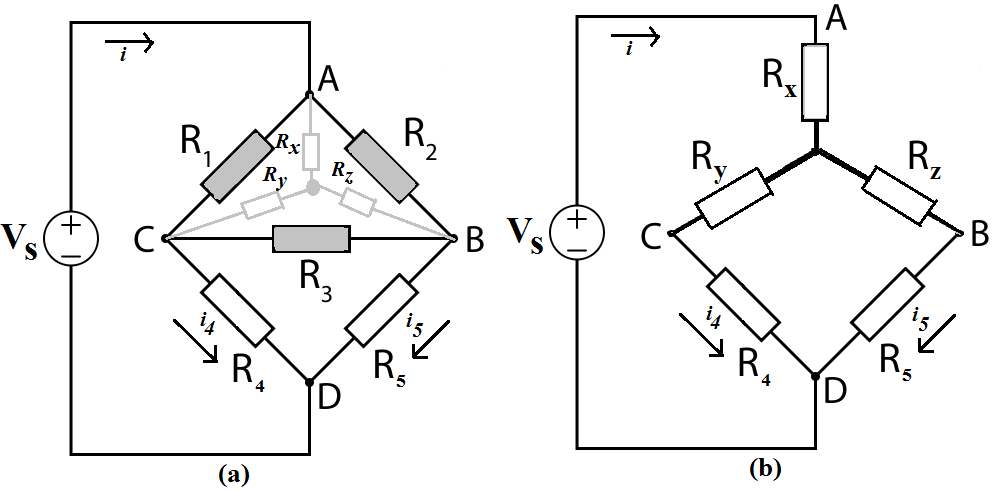
**## Ligação Estrela – Triângulo**

Na associação estrela/triângulo de resistores, não é possível aplicar os procedimentos de simplificação de circuitos resistivos, como os desenvolvidos para associação série ou paralela entre resistores de forma direta. Dependendo do tipo de associação estrela ou triângulo, presente em um circuito, é possível realizar uma conversão estrela/triângulo ou vice-versa, de modo a permitir uma análise mais simples do circuito. A transformação de uma associação estrela para triângulo ou vice-versa, deverá preservar o mesmo nível de corrente e tensão observados nos pontos de conexão da associação estrela ou triângulo original, como será exemplificado usando a figura abaixo

Na figura ao lado temos uma associação de 5 resistores, a qual não permite uma simplificação direta usando métodos de associação série ou paralela. Neste caso, uma possibilidade de obter um circuito simplificado é realizar uma transformação triângulo-estrela, tomando os resistores R1, R2 e R3, que estão conectados em triângulo. De modo a que o circuito obtido seja equivalente ao circuito original, é necessário que no circuito resultante as correntes *i*, *i4* e *i5* sejam as mesmas do circuito original, levando também a que as tensões *vAB*, *vAC* e *vCB* também sejam as mesmas do circuito original.

O circuito modificado, após a transformação triângulo-estrela, é o apresentado nas figuras (a) e (b) abaixo.





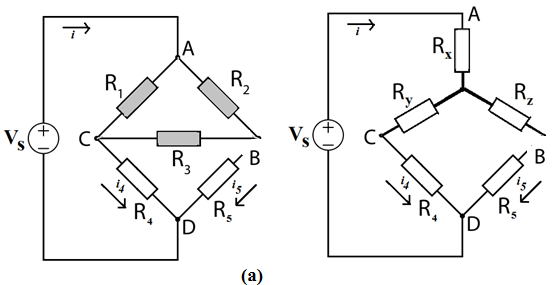
Transformação Triângulo → Estrela.

Observando o circuito acima, percebe-se que após a transformação Triângulo – Estrela, o circuito equivalente resultante, formado pelos resistores Rx, Ry e Rz, torna possível determinar uma resistência equivalente a qual será dada por

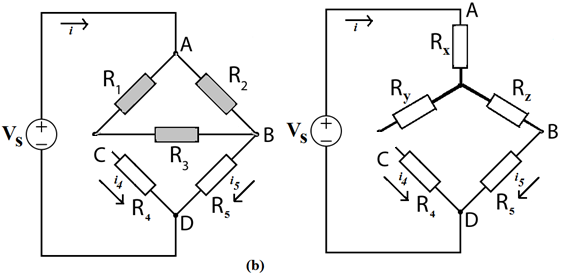
**Determinação dos resistores Rx, Ry e Rz**

Como discutido, o circuito formado pelos resistores Rx, Ry, Rz, R4 e R5, será equivalente ao circuito formado pelos resistores R1, R2, R3, R4 e R5, original, se as tensões *vAC*, *vAB*, *vCB* e correntes *i, i4* e *i5*, em ambos os circuitos forem as mesmas. Isso indica que as resistências equivalentes, vistas de qualquer um dos pares de terminais AB, AC, BC, como indicado nas figuras abaixo, de qualquer dos circuitos, devem ser exatamente iguais.

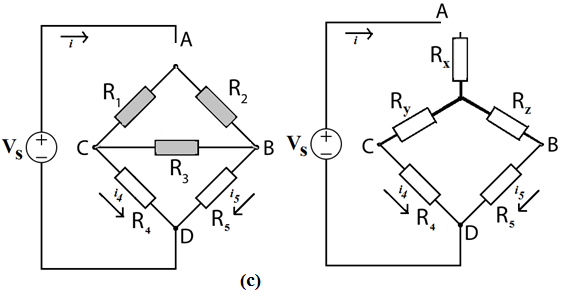
**OBS: Quando avaliamos as resistências equivalentes entre dois terminais o terceiro deverá estar desconectado, como indicado nas figuras abaixo.**

****

e

****

e

****

e

Desenvolvendo o conjunto das equações das resistências equivalentes para cada circuito, temos:

considerando , como *Rd*, multiplicando as duas primeiras equações por -1 e em seguida somando as mesmas, temos

Desenvolvimento análogo pode ser realizado para a determinação das expressões para o cálculo de *Rx* e *Ry*, levando as seguintes expressões

Observe que a expressão para cada resistência equivalente da conexão estrela é obtida através de uma expressão que é função das resistências do circuito triângulo onde o denominador é a soma de todas as resistências do circuito triângulo e o numerador é o produto das duas resistências do circuito triângulo, adjacentes a resistência do circuito estrela que se deseja determinar.

**Determinação dos resistores R1, R2 e R3**

Na transformação estrela→triângulo, dado o circuito original formado pelos resistores Rx, Ry, Rz, R4 e R5, um circuito equivalente formado pelos resistores R1, R2, R3, R4 e R5, pode ser determinado. As considerações de equivalências discutidas na transformação triângulo-estrela são as mesmas, logo as expressões das resistências equivalentes entre os terminais AB, AC e BC são as mesmas.

Para determinação das expressões de R1, R2 e R3 a partir de Rx, Ry e Rz, devemos dividir as expressões entre si e aplicar as relações de transformação de triângulo-estrela, previamente determinadas. Segue o desenvolvimento.

Dividindo a expressão de pela expressão de , temos

desenvolvendo temos,

cancelando os dois últimos termos, como indicado, e observando que

, e , onde , temos

Da expressão , temos que , assim, substituindo este resultado em , temos . Substituindo este resultado na equação anterior, temos

,

colocando o termo *RxR3* em evidência, temos

, logo

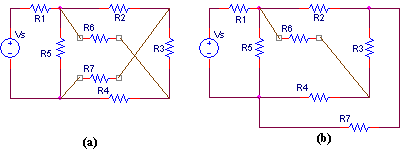
De modo equivalente as expressões para *R1* e *R2* podem ser determinadas. As mesmas são apresentadas a seguir

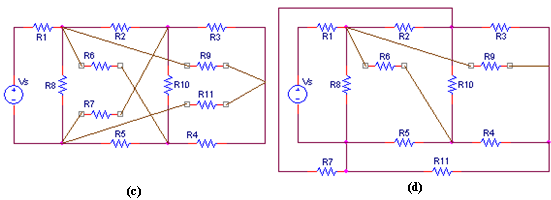
Observe que a expressão para cada resistência equivalente da conexão triângulo é obtida através de uma expressão que é função das resistências do circuito estrela onde o denominador é igual a resistência do circuito estrela original, diametralmente oposta a resistência do circuito triângulo que se deseja determinar e o numerador é a soma do produto dois a dois das resistências do circuito estrela original.

**## Técnicas de Análise de Circuitos**

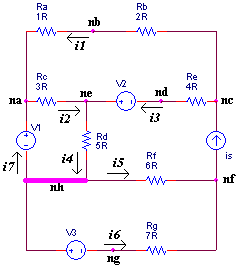
**# Terminologia**

1. Circuito Planar – Circuito que pode ser desenhado no plano sem que dois ou mais ramos se cruzem. Nas figuras abaixo são apresentados dois circuitos que a partir de uma observação inicial indicariam ser não planares, no entanto, para o circuito (a), após uma reorganização dos resistores, percebe-se que o mesmo é planar. No caso do circuito (c), mesmo após a reorganização, ainda há um cruzamento de ramos, configurando o circuito não planar;





1. Nó – Ponto ao qual estão conectados dois ou mais elementos;
2. Nó essencial – Ponto ao qual estão ligados três ou mais elementos;
3. Caminho – Sequência de elementos ligados entre si na qual nenhum elemento é incluído mais de uma vez;
4. Ramo – Caminho que liga dois nós;
5. Ramo essencial – Caminho que liga dois nós essenciais sem passar por outro nó essencial;
6. Malha – Caminho fechado onde o último nó coincide com o primeiro, sem passar por um mesmo nó mais de uma vez;
7. Malha simples – Malha que não inclui nenhuma outra malha em seu interior.



Exemplos de:

- Nó: na, nb, nc, nd, ne, nf, ng e nh;

- Nó essencial: na, nc, ne, nf e nh;

- Caminho: V1, Ra, Rb, Is, Rg e V3;

- Ramo: Ra;

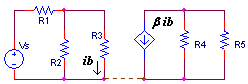
- Ramo essencial: Ra e Rb;

- Malha: V1, Rc, V2, Re, Is e Rf;

- Malha Simples: V1, Rc e Rd.

**## Sistematização da análise**

1. LKC – Circuito com *“n”* nós possibilita obter *“n-1”* equações linearmente independentes;
2. LKT – Obtém-se as *“k”* outras equações independentes para determinar todas as incógnitas do circuito, onde *k=b-(n-1)* e *“b”* é o número de incógnitas;
3. Uso de nós essenciais diminui o número de incógnitas a determinar (número de nós essenciais, *“ne”* é menor ou igual ao número de nós, *“n”*, em um circuito);
4. Ao usar os nós essenciais para obtenção das equações de corrente, as demais *“k”* equações necessárias para obter uma solução única podem ser definidas a partir das equações das malhas simples do circuito;
5. Circuitos acoplados através de fontes dependentes – Corrente no ramo de interligação das partes do circuito é nula. A interligação mantém o mesmo potencial entre as partes do circuito, tomada com relação a um mesmo potencial de referência;
6. Circuitos acoplados através de fontes dependentes: LKC – Obtém-se *“n-s”* expressões de corrente independentes, onde *“n”* é o número de nós e *“s”* o número de partes;
7. Circuitos acoplados através de fontes dependentes: LKT – Obtém-se *“b-(n-s)”* expressões de malhas independentes, onde *“b”* é o número de incógnitas.
8. Circuitos acoplados através de fontes dependentes



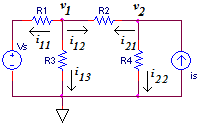
a) Conexão interliga dois nós tornando-os apenas 1;

b) Corrente no ramo de interligação é nula.

* 1. Em um circuito acoplado através de fontes dependentes, formado por “s” partes, onde são observados “n” nós e “b” ramos, temos:
     1. **LKC:** Obtém-se “n-s” expressões de corrente independentes;
     2. **LKT:** Obtém-se “b-(n-s)” expressões de malhas independentes.

**## Método de Tensão de Nó**

Considere o circuito apresentado na figura abaixo:



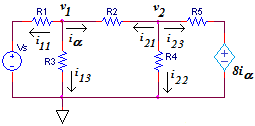
Procedimento:

1. Desenhar circuito sem cruzamento de ramos e identificar os nós essenciais;
2. Selecionar um nó essencial como sendo o nó de referência (Obs: Escolher o nó de referência como sendo o que está conectado ao maior número de ramos);
3. Definir as tensões de nó com relação ao nó de referência
4. Definir as equações das tensões de nós: Soma das correntes que saem do nó é igual a zero (correntes saindo – positivas). Observe que

Substituindo os termos de corrente pelas expressões de tensão, a partir da lei de Ohm, temos

O sistema apresentará solução única – duas incógnitas e duas equações linearmente independentes.

Circuito com fontes dependentes: considere o circuito da figura abaixo



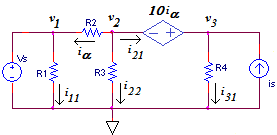
1. Definir as equações das tensões de nós: Soma das correntes que saem do nó é igual a zero (correntes saindo – positivas). Observe que

Substituindo os termos de corrente pelas expressões de tensão, a partir da lei de Ohm, temos:

Observe que *iα* deve ser eliminado do sistema de equações, para que este seja igual ao número de incógnitas. Como , então temos que , logo:

O sistema apresentará solução única – duas incógnitas e duas equações linearmente independentes.

Circuitos que apresentam fontes de tensão (independentes ou dependentes) levam a circuitos com número de tensões de nó desconhecidas menor – Conceito de Supernó.



1. Definir as equações das tensões de nós: Soma das correntes que saem do nó é igual a zero (correntes saindo – positivas). Observe que para o circuito acima, a tensão de nó *v1* já é conhecida, sendo igual a *vs*. Logo só serão escritas as equações para os nós 2 e 3.

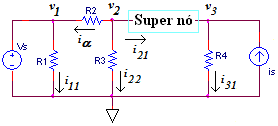
Substituindo os termos de corrente pelas expressões de tensão, a partir da lei de Ohm, temos:

Como não há uma expressão que defina *i21* em termos das tensões de nó desejadas, a mesma pode ser eliminada das equações, somando-se as equações dos nós 2 e 3, obtendo:

como , temos:

Para determinação das tensões é necessária mais uma equação. Esta equação é obtida da relação estabelecida pela fonte de tensão dependente (), entre as tensões dos nós 2 e 3, definida por:

Assim, o sistema obtido de duas equações e duas incógnitas apresentará solução única. A equação dos nós 2 e 3 poderia ser obtida de forma direta se considerarmos que o ramo onde está a fonte de tensão dependente (), representa um único nó, o qual denominaremos de *“super nó”* (ver figura a seguir).



Observe que permanecem mantidas as tensões nos nós do circuito, ou seja, mantemos as tensões . Utilizando o mesmo critério de que corrente saindo são positivas, temos para o *“super nó”* a seguinte equação:

Substituindo os termos de corrente por suas respectivas expressões em termos das tensões, teremos:

Obtém-se assim expressão igual a expressão *“equação nó 2 e 3”* resultante da soma das equações dos nós 2 e 3.

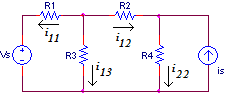
**## Método de correntes de Malha**

O método de correntes de malha, como o método de tensões de nó, objetiva levar a solução de análise de um circuito, reduzindo o número de equações do sistema de equações que deve ser gerado para determinação do conjunto de grandezas de interesse.

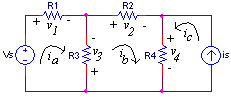
**OBS: O método não é aplicado a circuitos não planares, pois o cruzamento de ramos não permite definir malhas simples.**

Na aplicação do método de correntes de malha, define-se a corrente de malha como sendo a corrente que circula no perímetro de uma malha. Esta, pode, ou não, coincidir com as correntes dos ramos que constituem a malha simples.

Considere o circuito abaixo:



Considerando que se deseja determinar as correntes *i11, i12, i13* e *i22*, pelos métodos convencionais (LKT, LKC, etc) seria necessário um sistema de quatro equações para se obter os valores das correntes. Aplicando o método das correntes de malha, define-se, para o circuito em questão, que possui três malhas simples, três correntes de malha, indicadas por *ia, ib* e *ic*, como mostrado na figura abaixo. Inicialmente, podemos estabelecer a relação entre as correntes de malha *ia, ib* e *ic* e as correntes a determinar (correntes de ramo) *i11, i12, i13* e *i22*, sendo estas definidas por:



Pode-se perceber, para o circuito acima, que a corrente de malha *ic* é a própria corrente *is*, definida pela fonte independente de corrente. Podemos afirma isso pelo fato de que a corrente *ic* é a corrente que circula pelos elementos R4 e fonte *is*, como esta é uma fonte de corrente independente, que impõe a corrente no ramo onde está conectada, e como *ic* passa por esse ramo, conclui-se que *ic* = *is*.

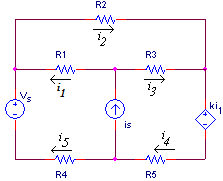
No método das correntes de malha utilizamos a LKT para escrever as equações de cada uma das malhas simples identificadas no circuito. Com relação as polaridades definidas para os resistores, adotou-se o sentido associado de correntes e tensões. Para os elementos compartilhados por mais de uma malha simples, como no caso dos resistores R3 e R4, para o circuito acima, pode ser definida uma polaridade de tensão associada a cada corrente de malha, por exemplo, para o resistor R3, pode ser definida uma polaridade de tensão considerando a corrente de malha *ia* e outra polaridade de tensão considerando a corrente de malha *ib*. Este procedimento, no entanto, pode causar confusão, assim, sugere-se definir uma única polaridade, considerando uma das correntes de malha que passa pelo elemento comum. Esta polaridade é então utilizada na escrita das equações de malha de todas as malhas que compartilham o elemento. No caso do circuito acima, para o resistor R3, a polaridade da tensão foi definida pela corrente de malha *ib* e será usada na obtenção das equações de tensão tanto da malha da corrente *ib*, quanto para a malha da corrente *ia*. Utilizando a LKT e percorrendo as malhas no sentido de circulação das respectivas correntes de malha, considerando queda de tensão positiva, temos:

Não escreveremos a equação para a malha de *ic*, visto que como explicado . Reescrevendo as equações de tensão em termos de correntes e resistências temos:

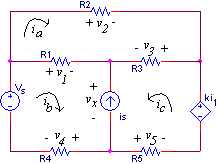
A utilização da mesma polaridade de referência para a tensão *v3*, para a escrita das equações das malhas percorridas pelas correntes *ia* e *ib*, permite utilizar a mesma equação de *v3*, definida em função de R3, *ib* e *ia*, em ambas as equações de malha, conforme observado nas equações acima. Como , temos:

sistema com duas incógnitas.

Considere o circuito abaixo



Considerando que se deseja determinar as correntes *i1, i2, i3, i4* e *i5*, pelos métodos convencionais (LKT, LKC, etc) seria necessário um sistema de cinco equações para se obter os valores das correntes. Aplicando o método das correntes de malha, define-se, para o circuito em questão, que possui três malhas simples, três correntes de malha, indicadas por *ia, ib* e *ic*, como mostrado na figura a seguir. Inicialmente, podemos estabelecer a relação entre as correntes de malha *ia, ib* e *ic* e as correntes a determinar (correntes de ramo) *i1, i2, i3, i4* e *i5*, sendo estas definidas por:



No circuito acima percebe-se que os elementos R1, R3 e a fonte *is* são compartilhados por mais de uma malha. No caso dos resistores, as polaridades de referência, indicadas no circuito, foram definidas considerando *ib*, no caso de R1 e no caso de R3, tanto *ia* como *ic* foram consideradas, visto que ambas atravessam o referido resistor numa mesma direção. Utilizando a LKT e percorrendo as malhas no sentido de circulação das respectivas correntes de malha, considerando queda de tensão positiva, temos:

Reescrevendo as equações de tensão em termos de correntes e resistências temos:

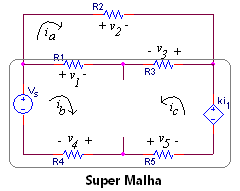
Observa-se nas equações acima a existência do termo *vx* que não pode ser definido a partir de uma relação entre correntes de malha e resistência, visto que o mesmo representa a tensão sobre uma fonte de corrente. Há duas possibilidades para prosseguir a partir deste ponto: 1) definimos uma quarta equação e dessa forma obtemos o número de equações necessárias para determinar as correntes de malha *ia, ib* e *ic* e adicionalmente o valor de *vx*, ou 2) eliminamos *vx*, realizando uma combinação linear com as equações que contém este termo. Prosseguiremos usando a opção 2, assim, subtraindo da equação de malha da corrente *ib*, a expressão da equação de malha da corrente *ic*, temos:

logo:

Para que possamos determinar de forma única os valores de *ia, ib* e *ic*, ainda necessitamos de uma equação. Esta, é definida pela relação estabelecida entre a fonte de corrente e as correntes de malha, cujas malhas compartilham a fonte de corrente, ou seja, no nosso exemplo, a fonte de corrente *is* é compartilhada pelas malhas onde circulam as correntes de malha *ib* e *ic*, assim, há uma relação entre estas corrente e a corrente da fonte definida por:

Com a equação acima, complementa-se o número de equações do sistema, obtendo-se três equações que permitirão determinar as três correntes de malha *ia, ib* e *ic*.

A equação poderia ser obtida de forma direta se eliminarmos o ramo onde está a fonte de corrente , dessa forma, unindo as malhas simples onde circulam as correntes de malha *ib* e *ic*. Esta malha resultante é denominada de *“super malha”* (ver figura a seguir). Tenha em mente que isto é apenas um artifício para obtenção de expressões sem a presença do termo *vx*. Perceba também que as correntes de malha devem ser mantidas inalteradas.



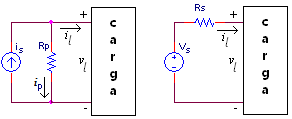
Será determinada a expressão da equação da super malha, percorrendo-a tanto no sentido da corrente *ib*, quanto no sentido da corrente *ic*, preservando a consideração de que queda de tensão é positiva, como na análise inicial. O objetivo é mostrar que as equações resultantes serão iguais.

Multiplicando ambos os termos por (-1), temos

Como gostaríamos de demonstrar, as equações são exatamente as mesmas.

**## Transformação de Fontes**

Considere os circuitos abaixo



Os circuitos acima podem ser considerados equivalentes, sendo alimentados por uma fonte de tensão em série com uma resistência ou por uma fonte de corrente em paralelo com uma resistência, se a tensão entre os terminais da carga, *vl*, e a corrente de carga, *il*, forem iguais. Respeitando-se essas condições de equivalência é então possível transformar um circuito que contenha uma fonte de corrente em série com um resistor em um circuito com uma fonte de corrente em paralelo com um resistor.

Considerando as premissas de equivalência acima indicadas e definindo que a resistência em série com a fonte de tensão, , será igual a resistência a ser conectada em paralelo com a fonte de corrente, , deve-se determinar uma expressão para *vs*, a partir de *is*, na transformação *fonte de corrente → fonte de tensão*, bem como uma expressão para *is*, a partir de *vs*, na transformação *fonte de tensão → fonte de corrente*.

Do circuito com a fonte de tensão, temos: . Do circuito com a fonte de corrente temos: . Substituindo o valor de *vl* na primeira expressão, temos:

como , temos:

Assim, na transformação *fonte de corrente → fonte de tensão*, teremos:. Na transformação *fonte de tensão → fonte de corrente*, teremos: .

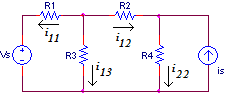
**## Circuito Equivalente Thévenin e Norton**

Os circuitos equivalentes Thévenin são circuitos simplificados, representados por uma fonte de tensão em série com um resistor.

Os circuitos equivalentes Norton são circuitos simplificados, representados por uma fonte de corrente em paralelo com um resistor.

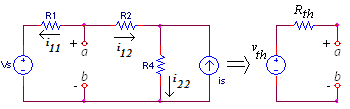
Ambos os circuitos representam o comportamento observado entre dois terminais, comumente designados de “a” e “b”, de um circuito constituído por fontes independentes/dependentes de corrente e/ou tensão, resistores e outros elementos.

Por exemplo, considere o circuito apresentado abaixo, onde se deseja determinar a corrente *i13* no resistor *R3*.



Como já foi visto, usando o método de correntes de malha, foi possível determinar a respectiva corrente *i13*, para isso foi necessário resolver um sistema com duas equações. Considere agora que ao invés de apenas um valor para *R3*, fosse desejado determinar a corrente para 100 valores distintos de *R3*, claramente seria possível resolver pelo método das correntes de malha, por exemplo, no entanto, para cada novo valor de *R3*, seria necessário resolver o sistema de duas equações.

Considere agora a determinação do circuito equivalente Thévenin, visto dos terminais do resistor *R3* (terminais “a” e “b”), conforme indicado na figura abaixo. O circuito resultante é formado apenas por uma fonte de tensão *vth* (tensão equivalente Thévenin) e uma resistência equivalente *Rth* (resistência equivalente Thévenin). Através dos procedimentos que serão discutidos na sequência, para determinação de *vth* e *Rth*, pode-se afirmar que a tensão sobre o resistor *R3*, bem como a corrente circulando pelo mesmo, serão iguais, medindo-se estas grandezas com o resistor *R3* acoplado ao circuito original ou quando o mesmo está acoplado ao circuito equivalente Thévenin/Norton.

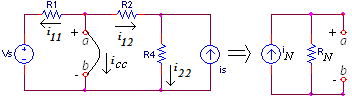


Quando deseja-se determinar o circuito equivalente Thévenin visto entre os terminais de um dado elemento do circuito, como no exemplo acima, o referido elemento é retirado do circuito, restando apenas os terminais “a” e “b”, entre os quais será determinado o circuito equivalente Thévenin. Há caso em que os terminais “a” e “b” já se encontram livres, não sendo necessária a retirada de qualquer elemento do circuito original.

Na determinação dos elementos que constituem o circuito equivalente Thévenin, *vth* e *Rth*,os seguintes procedimentos e condições devem ser observadas:

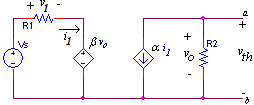
1. A tensão *vth*, é a tensão observada entre os terminais “a” e “b”, do circuito original, com estes terminais abertos;
2. Podem ser utilizados quaisquer métodos de análise para determinação de *vth*;
3. A determinação de *Rth* deve ser realizada a partir de um dos três métodos que serão discutidos na sequência, observando-se as seguintes restrições
   1. O método 1 só pode ser utilizado em circuitos que contenham unicamente fontes de corrente e/ou tensão independentes;
   2. O método 2 pode ser utilizado em circuitos que contenham fontes dependentes e pelo menos uma fonte independente. O método aplica-se também a circuitos contendo apenas fontes independentes;
   3. O método 3 aplica-se a qualquer circuito, contendo apenas fontes dependentes, ou apenas fontes independentes ou uma combinação destas.

A determinação do circuito equivalente Norton, conforme indicado na figura abaixo, pode ser realizada a partir da determinação do circuito equivalente Thévenin e em seguida realizando-se uma transformação de fontes, ou diretamente. Na determinação direta, a corrente de Norton (corrente da fonte de corrente do circuito equivalente Norton) é determinada curto circuitando os terminais “a” e “b” no circuito original. A corrente que passa por esse curto-circuito é a corrente Norton. Deve ser observado que a corrente Norton é uma corrente que sai no terminal (+) e retorna no terminal (-), correspondente a polaridade da tensão de Thévenin, vista entre os terminais “a” e “b” do circuito original.



Exemplo:

Considere o circuito apresentado na figura abaixo. Para o mesmo serão determinados os respectivos circuitos equivalentes Thévenin e Norton.



Observe no circuito acima que os terminais “a” e “b” já estão abertos, não havendo a necessidade de retirada de componentes. Observe também que a polaridade da tensão equivalente Thévenin está explicitamente indicada.

**# Determinação de *vth*.**

Observando o circuito exemplo, percebe-se que a tensão de Thévenin, *vth*, é igual a tensão *vo*, assim, podemos escrever

A tensão no resistor *R2* é determinada pela corrente gerada pela fonte de corrente dependente e esta corrente circula pelo resistor de modo que a tensão gerada possui polaridade contrária a polaridade de referência indicada na figura, por isso, na equação de *vo*, indicada acima, acrescenta-se o sinal (-) para representar essa polaridade invertida.

Da parte do circuito onde está a fonte de tensão independente, escrevendo a equação de tensão para a malha simples formada pelas fontes de tensão e pelo resistor *R1*, percorrendo a malha no sentido indicado pela corrente *i1* e considerando queda de tensão (+), temos:

Isolando a corrente *i1*, temos:

Substituindo na expressão de *vth*,

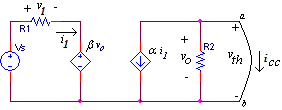
isolando os termos de *vth*,

então

Observe que na expressão há apenas termos conhecidos. Não há qualquer variável, tal como *i1* ou *vo*.

**# Determinação de *Rth*.**

- Método 2 – Nesse método a resistência equivalente Thévenin é determinada a partir da equação , onde, como já definido anteriormente, *icc* é a corrente que passa pelo curto estabelecido entre os terminais “a” e “b”, no circuito original, e que corresponde a própria corrente de Norton.



Curto circuitando os terminais “a” e “b”, conforme mostrado na figura acima, forçamos a tensão *vo* para zero, já que toda a corrente gerada pela fonte dependente passará pelo curto-circuito. Esse fato também define que . O sinal negativo representa o fato de que a corrente de referência *icc* circula pelo curto em sentido contrário a corrente real imposta pela fonte de corrente dependente.

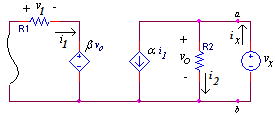
Da parte do circuito onde está a fonte de tensão independente, escrevendo a equação de tensão para a malha simples formada pelas fontes de tensão e pelo resistor *R1*, percorrendo a malha no sentido indicado pela corrente *i1* e considerando queda de tensão (+), temos:

Isolando a corrente *i1*, e observando que , temos:

Substituindo na expressão de *icc*,

Calculando *Rth*,

- Método 3 – Nesse método a resistência equivalente Thévenin é determinada a partir da equação , onde, *vx* é *ix* é a tensão e a corrente de uma fonte independente de corrente ou tensão acoplada aos terminais “a” e “b” do circuito original. Neste método, todas as fontes independentes de corrente e tensão devem ,OBRIGATORIAMENTE, ser eliminadas do circuito. A eliminação das fontes de tensão independentes é realizada curto circuitando os seus terminais e as fontes de corrente independentes são eliminadas abrindo os seus terminais. Conforme descrição, a aplicação do método 3 ao circuito exemplo o deixará com a estrutura mostrada na figura abaixo.



O objetivo quando utiliza-se o método 3 é determinar uma expressão para *vx* que seja função de *ix*, ou vice-versa. Além disso, as expressões devem ser da forma , ou , dessa forma, quando for calculada a razão , que determina , constarão apenas os termos conhecidos do circuito. Vejamos o cálculo para o exemplo

A partir da LKC podemos escrever a seguinte equação para as correntes é *αi1*, é *i2* e *ix*.

Substituindo *i2* pela sua expressão em termos de *vx*, temos

Da parte do circuito onde está a fonte de tensão dependente, escrevendo a equação de tensão para a malha simples formada pela fonte de tensão e pelo resistor *R1*, percorrendo a malha no sentido indicado pela corrente *i1* e considerando queda de tensão (+), temos:

Isolando a corrente *i1* e observando que *vo= vx,* temos:

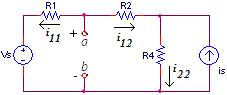
Substituindo na expressão de *ix*,

onde:

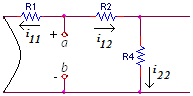
Calculando *Rth*,

O circuito equivalente Norton apresentará a mesma resistência Thévenin, conectada em paralelo com uma fonte de corrente cujo valor corresponde a corrente *icc* determinada quando da aplicação do método 2.

- Método 1 – Como o circuito usado como exemplo não permite a determinação da resistência equivalente Thévenin pelo método 1, pois contém fontes dependentes, será usado o circuito mostrado na figura abaixo para exemplificar a aplicação deste método.



Pelo método 1 todas as fontes independentes de corrente e tensão devem ser eliminadas do circuito. A eliminação ocorre de forma similar a aplicada no método 3, fontes de tensão são curto circuitadas e fonte de corrente tem seus terminais abertos. Realizando essas intervenções no circuito o mesmo é representado como apresentado na figura abaixo



Observando a partir dos terminais “a” e “b” do circuito, percebe-se que os resistores *R2* e *R4* estão em série e esta associação está em paralelo com o resistor *R1*. Sendo assim, a resistência equivalente Thévenin é dada por .

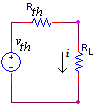
**OBS: Quando o circuito apresenta fontes dependentes existe a possibilidade de se obter valores de resistência equivalente Thévenin NEGATIVAS. Perceba que uma resistência negativa indica um elemento fornecedor de energia. Esse comportamento está de fato refletindo um comportamento conjunto de todas as fontes e outros elementos do circuito original e não pode ser vista estritamente como uma resistência pura. No caso de circuitos contendo apenas fontes independentes de fato a resistência equivalente Thévenin representa efetivamente uma resistência.**

**## Máxima Transferência de Potência**

O estudo de máxima transferência de potência permite identificar se um dado componente, que consome energia, está recebendo do circuito ao qual está acoplado o máximo de potência que aquele pode transferir.

A condição para que haja a máxima transferência de potência é que a resistência de um dado elemento consumidor seja igual a resistência equivalente Thévenin, vista dos terminais do referido elemento, como será demonstrado a seguir

Considere o circuito mostrado na figura abaixo. Nele podemos observar a representação do circuito equivalente Thévenin, visto dos terminais de um resistor RL. Para verificar a afirmação de que se , temos a máxima transferência de potência, devemos determinar a expressão de potência no resistor , que é dada por:



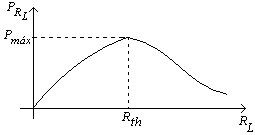
Derivando a expressão acima e igualando a zero, determinamos o ponto de máximo ou mínimo da mesma. A derivada será realizada em função de , visto que é o termo que pode ser alterado para satisfazer a condição de máxima transferência de potência.

Conclui-se que

O cálculo da derivada segunda demonstrará que para quando , a expressão de apresenta um ponto de máximo.

O valor da potência máxima transferida para , quando o mesmo é igual a , é determinado pela expressão

Na figura abaixo é apresentado o gráfico do comportamento da curva de em função da resistência .



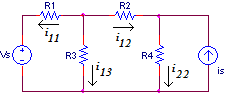
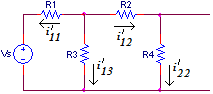
**OBS:**

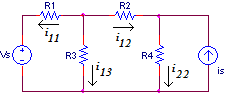
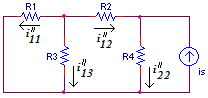
1. **A potência máxima transferida para uma carga sempre será menor ou igual a metade da potência total gerada no circuito que alimenta a carga.**
2. **Para determinar se um dado elemento consumidor em um circuito recebe a máxima potência que o circuito poderia fornecer, basta determinar a resistência equivalente Thévenin, , do circuito, vista dos terminais do respectivo elemento. Se a for igual a resistência do elemento, então estará havendo máxima transferência de potência. Caso contrário, não há máxima transferência de potência.**

**## Método da Superposição**

O método de superposição de análise de circuitos aplica-se a circuitos lineares invariantes no tempo, onde as propriedades da superposição são satisfeitas. Neste método, a obtenção das grandezas de interesse do circuito (correntes e/ou tensões) ocorre através da soma de parcelas dessas grandezas, determinadas considerando a operação ISOLADA de cada fonte independente presente no circuito.

Para exemplificar a aplicação do método, considere o circuito abaixo, onde se deseja determinar as correntes *i11*, *i12*, *i13* e *i22*. Para isso, serão determinadas parcelas , , e e parcelas , , e , onde as parcelas , serão obtidas considerando o circuito operando apenas com a fonte de tensão *vs* e as parcelas , serão obtidas considerando o circuito operando apenas com a fonte de corrente *is*. Os respectivos circuitos para cada condição de operação são mostrados em conjunto com o circuito original e respectivas correntes.

 apenas *vs*

 apenas *is*

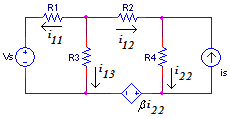
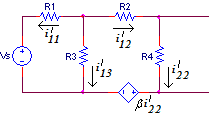
Nos exemplos acima, como as parcelas e mantiveram o mesmo sentido das correntes originalmente definidas no circuito com todas as fontes, o cálculo da componente total é realizado somando-se as parcelas e , ou seja.

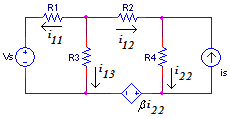
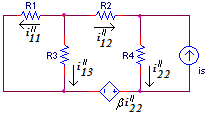
Também deve ser observado que a eliminação das fontes de tensão é realizada curto circuitando os terminais das mesmas, enquanto as fontes de corrente devem ter seus terminais abertos.

**OBS: A escolha do sentido das parcelas de corrente e polaridade das parcelas de tensão não precisa obrigatoriamente ser definidas em função dos sentidos e/ou polaridades das grandezas originalmente definidas no circuito com todas as fontes. Embora não seja obrigatório usar para as parcelas os sentidos de corrente e polaridades de tensão das grandezas do circuito original, a adoção dos mesmos proporciona um cálculo das grandezas totais bem simples, bastando apenas somar as parcelas.**

A aplicação do método da superposição em circuitos que apresentam fontes dependentes ocorre de forma semelhante ao de circuitos apenas com fontes independentes, ou seja, apenas as fontes independentes são eliminadas. Nenhuma fonte dependente deve ser eliminada ao se analisar um circuito através do método da superposição.

Para exemplificar, considere o circuito abaixo. Aplicando o método da superposição para determinação das correntes *i11*, *i12*, *i13* e *i22*, teremos o cálculo de duas parcelas para cada corrente, parcelas , , e e parcelas , , e , onde as parcelas , serão obtidas considerando o circuito operando apenas com a fonte de tensão *vs* e as parcelas , serão obtidas considerando o circuito operando apenas com a fonte de corrente *is*. Os respectivos circuitos para cada condição de operação são mostrados em conjunto com o circuito original e respectivas correntes.

apenas *vs* 

apenas *is* 

Observe que a fonte de tensão dependente foi mantida para cada condição de análise. Observe também que a componente de controle da fonte dependente corresponde a parcela da grandeza de controle original. De modo equivalente ao exemplo anterior, as grandezas totais serão determinadas a partir das expressões:

Propriedade da Superposição

1. Propriedade Homogênea:
2. Propriedade da aditividade:

então:

**## Indutores**

# Conceitos associados a eletromagnetismo

**Permeabilidade Magnética (*µ*):** Medida da facilidade com que linhas de campo magnético podem ser estabelecidas no interior de um material. A expressão da permeabilidade é dada por:

onde: *B* – Densidade de campo magnético (Indução magnética – weber/m2 ou Tesla) e

*H* – Vetor campo magnético ou Vetor Força Magnetizante (Ampere/m)

A permeabilidade muitas vezes é dada em termos relativos, cujo termo de comparação é a permeabilidade no vácuo, dada por µ0= 4π × 10−7 Henry/m. Assim, . Em função da permeabilidade magnética os materiais podem ser classificados como:

Diamagnético – Permeabilidade < µ0

Paramagnético – Permeabilidade > µ0

Ferromagnético – Permeabilidade >>> µ0 (o símbolo >>> indica muito maior)

**Densidade de Fluxo Magnético (*B*)** – Número de linhas de campo por unidade de área

**Relutância (R):** Oposição ao estabelecimento do fluxo magnético. É o análogo da resistência elétrica para circuitos magnéticos

**R**

onde: *l* – comprimento do circuito (metro);

*µ0* – permeabilidade do vácuo;

*µr* – permeabilidade relativa do material;

*A* – Área (m2).

**Lei de Ohm para circuitos magnéticos**:

A Força Magnetomotriz (FMM) é o análogo da tensão em um circuito magnético. De forma semelhante, o fluxo () é o análogo da corrente em um circuito magnético.

**Força Magnetizante (*H*):** O módulo do vetor força magnetizante numa bobina pode ser dado por:

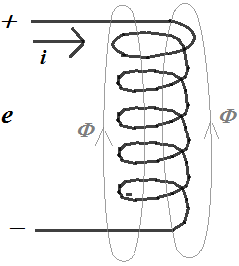
onde: *N* – número de espiras da bobina;

*i* – Corrente na bobina (A);

*l* – Comprimento da bobina (m).

**Indutância (H – Henry):** É um parâmetro dos circuitos lineares que relaciona a tensão induzida por um campo magnético variável à corrente responsável pelo campo. Nos circuitos são observados dois tipos de indutância: i) indutância própria e ii) indutância mútua.

**Indutância própria (L)** – Propriedade de um condutor de gerar uma força eletromotriz (tensão induzida) sobre ele próprio quando submetido a uma corrente elétrica variável. Nessa condição, é gerada uma força eletromotriz no sentido contrário à variação de corrente à qual o indutor está submetido, ou seja, o indutor tende a manter o fluxo de campo magnético inalterado.



Se considerarmos um indutor composto por uma bobina de “N” espiras envoltas em um núcleo de área “A”, temos que quando submetido a uma corrente “i”, esta bobina desenvolverá um fluxo dado por

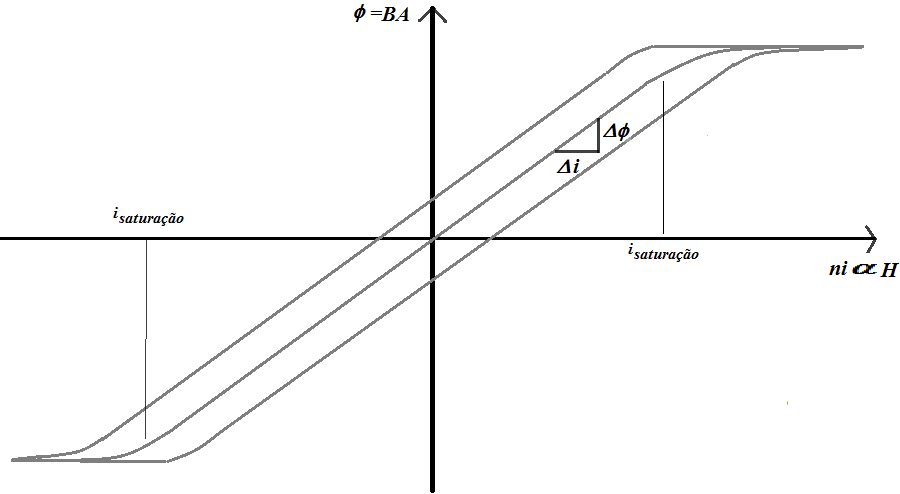
Como indicado acima, se a corrente circulando pela bobina for variável, será autoinduzida uma tensão na mesma dada por.

Desdobrando a derivada com a seguir temos

onde a indutância é dada por . Dado que , então podemos escrever a indutância própria como: .

Em indutores reais a indutância própria apresenta uma faixa de operação linear, onde a relação entre fluxo () e corrente (i) é linear e a partir de um nível de corrente, , apresenta um comportamento de saturação, quando aumentos de corrente não mais provocam aumento proprocional do fluxo (). Esse comportamento pode ser visualizado a partir da curva de histerese, que relaciona “B” e “H”. Como e , podemos analisar a curva de histerese em termos do fluxo () e da corrente (i).

Observando a curva abaixo percebe-se que após a corrente de saturação ser atingida, uma mesma variação não mais provocará igual variação . Como , que podemos aproximar por , percebe-se que após a saturação, tende a zero, logo, a indutância tende a zero na região de saturação.



Curva de Histerese

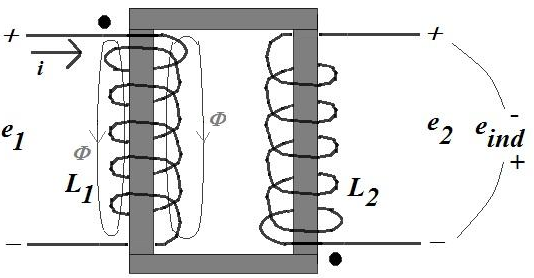
Em um indutor com indutância própria “L”, a polaridade da tensão reflete a reação do campo magnético à corrente responsável pela sua existência

* Quando “i” aumenta ⇒ a tensão no indutor, Nessa condição é preciso fornecer energia ao indutor para criação ou aumento do campo magnético;
* Quando “i” diminui ⇒ a tensão no indutor, Nessa condição o indutor devolve energia para o circuito, retirando-a do campo magnético;

OBS:

* A polaridade de referência adotada é aquela em que o potencial é positivo no terminal do indutor onde a corrente circulando pelo mesmo entra;
* Pela convenção passiva a tensão auto-induzida é uma queda de tensão no sentido da corrente que gera a própria.
* Todo indutor real é especificado pela sua indutância e pela sua corrente de trabalho. Essa corrente indica o maior nível de corrente que o indutor suporta sem que o mesmo entre na região de saturação.

**Indutância Mútua (M)** – Propriedade de um condutor de gerar uma força eletromotriz (tensão induzida) sobre um outro condutor quando submetido a uma corrente elétrica variável.



Na figura acima temos duas bobinas acopladas magneticamente através de um núcleo de material com permeabilidade maior que a do ar, que faz com que a quase totalidade das linhas de campo magnético geradas pela corrente “i”, que circula pela bobina de indutância *L,* fiquem confinadas no material do núcleo. Como as espiras da bobina de indutância *L2* concatenam estas linhas de campo, se houver uma variação de direção e/ou amplitude dessas linhas de campo magnético será induzida uma tensão nos terminais da bobina de indutância L2. A determinação da polaridade da tensão induzida, em relação a tensão de referência e2, dependerá da polaridade de acoplamento das bobinas, que é indicada pelos pontos observados na figura acima. Na sequência, serão apresentados procedimentos para determinação das polaraidades de acoplamento entre indutores acoplados, bem como uma regra que premitirá identificar a polaridade da tensão induzida em indutores acoplados.

A indutância de acoplamento ou indutância mútua é proporcional as indutâncias próprias dos indutores acoplados, podenderadas por um fator de acoplamento.

# Indutor: Expressões e simbologia.

Um indutor é representado em um circuito pelo elemento indicado na figura abaixo, onde podemos observar o sentido associado de corrente e tensão, que deve ser usado para analisar circuitos contendo este componente. Da forma como indicados o sentido de corrente e a polaridade de tensão, o indutor comporta-se como um consumidor de energia. Vale lembrar que o mesmo não dissipa energia, como o faz o resistor. Toda energia absorvida por um indutor ideal é armazenada na forma de um campo magnético.

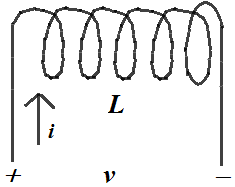
Expressões:

;

;

;

onde: é a corrente inicial em um indutor.

Símbolo: 

Das expressões do indutor podem ser observadas algumas características de funcionamento, importantes para o dispositivo:

* Sob condição de corrente constante, ou seja, , o indutor comporta-se como um curto-circuito;
* A corrente que atravessa um indutor não pode variar na forma de um degrau, ou seja, não pode apresentar uma descontinuidade, isso implicaria em um . Dessa forma, conclui-se que o indutor é um dispositivo amortecedor de oscilações de corrente (OBS: quando submetido a um impulso de tensão a corrente de um indutor pode apresentar uma mudança na forma de um degrau, contudo, um impulso de tensão apresenta energia infinita).

**## Determinação da polaridade de acoplamento de indutores acoplados**

**# Forma de bobinamento dos enrolamentos conhecida**

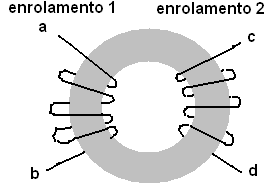
Considere os enrolamento 1 e 2 acoplados, que compatilham o mesmo núcleo toroidal, como indicado na figura abaixo. Para determinar a polaridade de acoplamento entre os indutores seguimos o procedimento descrito a seguir.

Passo 1 – Escolhe-se arbitrariamente um terminal de um dos enrolamentos e a ele associa um ponto de referência;

Passo 2 – Define-se uma corrente entrando neste terminal e a partir da regra da mão direita determina-se o sentido do fluxo gerado por esta corrente;

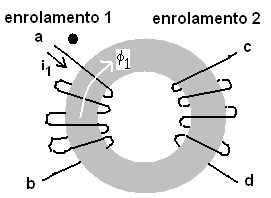
Passo 3 – Escolhe-se arbitrariamente um dos terminais do segundo enrolamento e define-se um sentido de corrente, arbitrário, para este terminal;

Passo 4 – Usa-se a regra da mão direita para determinar o sentido do fluxo gerado pela curva definida no passo 3;



Passo 5 – Comparam-se os sentidos dos fluxos identificados nos passos 2 e 4 e estabelece-se o ponto no segundo enrolamento da seguinte forma:

* Fluxos no mesmo sentido: Assinala-se com um ponto o terminal do segundo enrolamento onde a corrente está entrando;
* Fluxos em sentido contrário: Assinala-se com um ponto o terminal do segundo enrolamento onde a corrente está saindo.

Exemplo: Seguindo os passos descritos acima, temos:

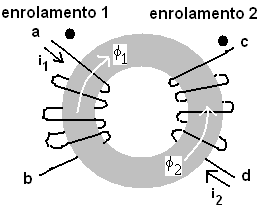
Passo 1 – Foi selecionado o terminal (a) do enrolamento 1 para colocação do ponto de referência;

Passo 2 – Foi definida uma corrente entrando no mesmo, i1, que provoca um fluxo no sentido horário, *Φ1*;

Passo 3 – Escolheu-se o terminal (d) do enrolamento 2 e a ele foi definida uma corrente entrando, i2;

Passo 4 – A partir da regra da mão direita, aplicada ao enrolamento 2 e percorrido pela corrente i2, observa-se a criação do fluxo *Φ2*, no sentido;

Passo 5 – Comparando-se os fluxos *Φ1* e *Φ2*, percebe-se que os mesmos estão em sentidos contrários, logo, pela regra anteriormente apresentada, o ponto no enrolamento 2 será colocado no terminal onde a corrente sai, sendo este o terminal (c).

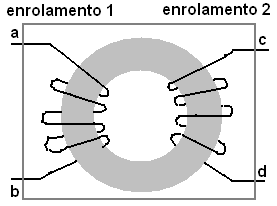


**# Forma de bobinamento dos enrolamentos desconhecida**

Considere os enrolamento 1 e 2 acoplados, que compatilham o mesmo núcleo magnético, como indicado na figura abaixo. No entanto, diferentemente do caso anterior, não se tem informação da forma como os mesmos são bobinados. Neste caso, para determinar a polaridade de acoplamento entre os indutores seguimos o procedimento descrito a seguir.

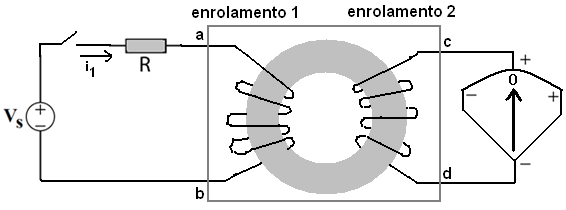
Passo 1 – Conecta-se a um dos enrolamentos uma fonte de tensão CC, chave liga/desliga e resistor. Ao outro enrolamento conecta-se um voltímetro CC, que pode indicar tensões positivas e negativas. No terminal do enrolamento onde será aplicada a tensão positiva da fonte é atribuído o ponto de referência;

Passo 2 – Após a conexão a chave liga desliga é acionada. Em uma sequência rápida a mesma é ligada e desligada, de modo que um pulso de tensão é aplicado ao enrolamento 1. Com a aplicação do pulso de tensão uma corrente entra no terminal em que foi conectado o potencial positivo da fonte;



Passo 3 – No enrolamento onde está conectado o voltímetro CC observa-se o sinal da tensão que foi gerada e a partir desse atribui-se o ponto a um dos terminais do enrolamento 2 seguindo a seguinte regra:

* Se a tensão gerada foi positiva, o ponto é atribuído ao terminal do enrolamento 2 conectado ao terminal positivo (+) do voltímetro CC;
* Se a tensão gerada foi negativa, o ponto é atribuído ao terminal do enrolamento 2 conectado ao terminal negativo (-) do voltímetro CC.



**# Regra do ponto**

Quando o sentido de referência da corrente em um ramo contendo um indutor acoplado entra no terminal ponto deste, esta corrente induzirá uma tensão cujo potencial positivo (+) será atribuído ao terminal ponto do respectivo indutor acoplado.

**## Capacitores**

Variação de tensão produz variação no campo elétrico produzida pela própria tensão, que representa o trabalho necessário para separar cargas de sinais contrários. Campoes elétricos variáveis induzem correntes (correntes de deslocamento) entre dois condutores imersos no campo elétrico.

**# Capacitância**: Medida da quantidade de carga que o capacitor pode armazenar em suas placas paralelas.

onde: *C* – Capacitância dada em Faraday (1 Faraday é uma capacitância muito grande, assim, é comum o uso de submúltiplos do Faraday, como o mF, μF, nF e pF);

*Q* – Carga em Coulombs e

*V* – Tensão em Volts.

OBS: Todo capacitor real é especificado pela sua capacitância e pela sua tensão de trabalho. Essa tensão indica o maior nível de tensão que o dielétrico que separa as placas do capacitor suporta sem que haja a ruptura do mesmo.

**# Características do Dielétrico:**

* Permissividade: Facilidade com que o dielétrico permite o estabelecimento de linhas de campo no seu interior. Quanto maior a permissividade de um dielétrico, maior a quantidade de carga depositada nas placas por unidade de área das mesmas (maior densidade de fluxo);
* Rigidez Dielétrica (quebra de ligações moleculares): A tensão / unidade de comprimento necessária para que haja condução em um dielétrico indica sua Rigidez Dielétrica e é denominada de “Tensão de Ruptura”.

**# Capacitor: Expressões e simbologia**

Um capacitor é representado em um circuito pelo elemento indicado na figura abaixo, onde podemos observar o sentido associado de corrente e tensão, que deve ser usado para analisar circuitos contendo este componente. Da forma como indicados o sentido de corrente e a polaridade de tensão, o capacitor comporta-se como um consumidor de energia. Vale lembrar que o mesmo não dissipa energia, como o faz o resistor. Toda energia absorvida por um capacitor ideal é armazenada na forma de um campo elétrico.

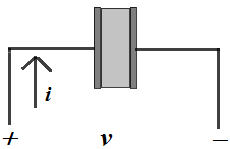
Expressões:

;

;

;

onde: é a tensão inicial em um capacitor.

Símbolo: 

Das expressões do capacitor podem ser observadas algumas características de funcionamento, importantes para o dispositivo:

* Quando uma tensão é aplicada aos terminais do capacitor, as cargas que existem no dielétrico não podem migrar para as placas, logo, não há transferência de cargas entre as placas do capacitor através do dielétrico, contudo, há um deslocamento de cargas no dielétrico, fazendo com que estas deixem suas posições de quilíbrio e movam-se paras as vizinhanças das placas condutoras. Esse movimento de cargas no interior do dielétrico provoca uma corrente de deslocamento, ;
* Pela expressão de corrente do capacitor percebe-se que quando a tensão entre os terminais do dispositivo torna-se constante, ou seja, , o capacitor comporta-se como um circuito aberto;
* A tensão entre os terminais de um capacitor não pode variar na forma de um degrau, ou seja, não pode apresentar uma descontinuidade, isso implicaria em um . Dessa forma, conclui-se que o capacitor é um dispositivo amortecedor de oscilações de tensão corrente (OBS: quando submetido a um impulso de corrente a tensão de um capacitor pode apresentar uma mudança na forma de um degrau, contudo, um impulso de corrente apresenta energia infinita).

**## Associação de Indutores**

**# Indutores não acoplados – Conexão Série**

Considere o circuito formado por um conjunto de indutores, todos conectados em série, como o apresentado na figura abaixo. A associação dos indutores pode ser substituída por um único indutor, cujo valor é determinado na sequência.

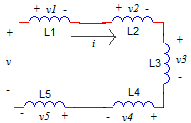
Usando a LKT, temos:

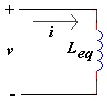
colocando em evidência, temos

Observando o circuito equivalente pretendido, que contém uma indutância equivalente *Leq*, temos que a expressão de tensão é dada por:

logo, .

Formula geral:





**# Indutores não acoplados – Conexão Paralela**

Considere o circuito formado por um conjunto de indutores, todos conectados em paralelo, como o apresentado na figura abaixo. A associação dos indutores pode ser substituída por um único indutor, cujo valor é determinado na sequência.

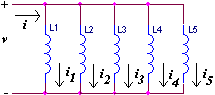
Usando a LKC, temos:

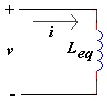
colocando em evidência, temos

Observando o circuito equivalente pretendido, que contém uma indutância equivalente *Leq*, temos que a expressão de corrente é dada por:

logo,

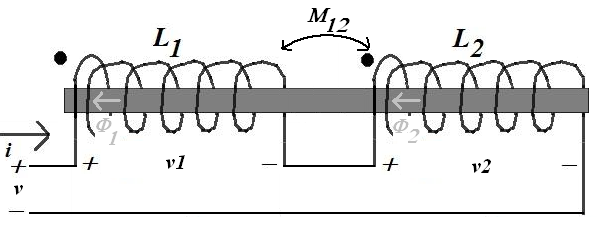
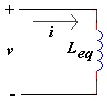
Formula geral:





**# Indutores acoplados – Conexão Série**

Considere o segmento de circuito formado por dois indutores conectados em série e magneticamente acoplados, como apresentado na figura abaixo. A associação desses indutores pode ser substituída por um único indutor, cujo valor é determinado na sequência.

Circuito

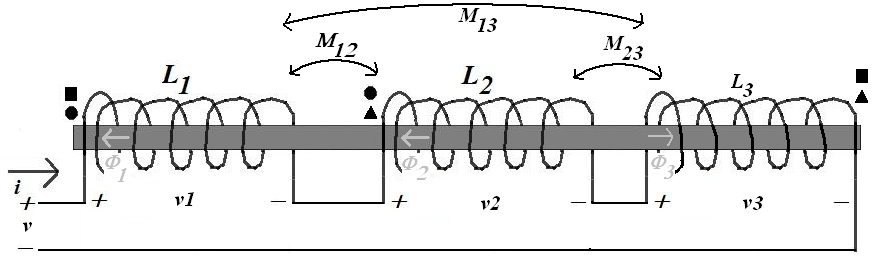
equivalente

Usando a LKT e considerando queda de tensão positiva, temos:

Observe que aparecem dois termos de tensão induzida, um para cada indutor, os quais são determinados através do produto entre a indutância mútua, representada por *M12* e a derivada da corrente que circula pelo indutor que induzirá tensão no outro. Para determinação do sinal das tensões induzidas foi utilizada a regra do ponto. No exemplo da figura acima percebe-se que as correntes entram nos terminais ponto de ambos os indutores, logo, as tensões induzidas por cada um dos mesmos terão sinais positivos nos respectivos terminais ponto dos indutores. Pela convenção adotada e quando percorre-se a malha no sentido da corrente, tanto para a tensão devida a indutância própria, como para o termo de tensão induzida, percebe-se que há uma queda de tensão, logo, os sinais de tensão, própria e induzida, serão positivos na equação. Colocando em evidência, temos

Observando o circuito equivalente pretendido, que contém uma indutância equivalente *Leq*, temos que a expressão de tensão é dada por:

logo,



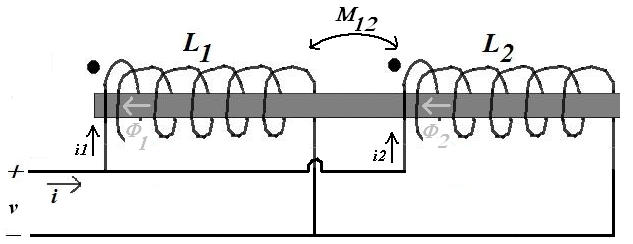
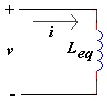
No segmento de circuito acima temos três indutores acoplados. Seguindo a regra do ponto, a convenção de queda positiva e percorrendo a malha no sentido de circulação da corrente, a equação de tensão, dada pela LKT será:

Colocando o termo em evidência, temos

logo,

**# Indutores acoplados – Conexão Paralela**

Considere o segmento de circuito formado por dois indutores conectados em paralelo e magneticamente acoplados, como apresentado na figura abaixo. A associação desses indutores pode ser substituída por um único indutor, cujo valor é determinado na sequência.

Circuito

equivalente

Usando a LKC, temos:

Escrevendo as expressões de fluxo, temos

Observe que as componentes de fluxo devidas as indutâncias mútuas são positivas, isso ocorre porque as correntes circulando em cada enrolamento reforça o fluxo do outro, como pode ser observado pelo sentidos dos fluxos indicados na figura. Escrevendo as expressões na forma matricial, temos

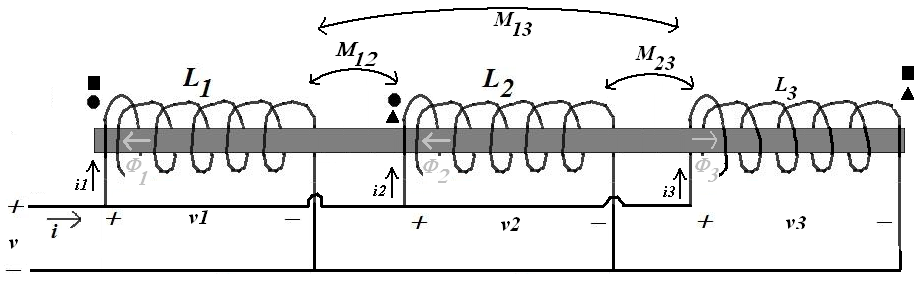
A matriz é denominada de matriz indutância. A partir da equação matricial podemos determinar as expressões das correntes, assim

onde: , e

Da conexão paralela temos que . Se considerarmos , então . Dado que e , conclui-se que . Escrevendo a equação de corrente dada pela LKC, temos

Considerando o nosso circuito equivalente e escrevendo a expressão do fluxo para o mesmo, temos

Comparando as duas últimas equações, temos que:



No segmento de circuito acima temos três indutores acoplados. Seguindo o procedimento descrito acima, escrevemos a seguinte equação de fluxo para cada indutor:

Escrevendo as expressões na forma matricial, temos

A partir da equação matricial podemos determinar as expressões das correntes, assim

onde: , , ,

, , , e

Baseado nas mesmas considerações anteriores a cerca de correntes e tensões, temos

Conclui-se que o inverso da indutância é dada por

**## Associação de Capacitores**

**# Conexão Série**

Considere o circuito formado por um conjunto de capacitores, todos conectados em série, como o apresentado na figura abaixo. A associação dos capacitores pode ser substituída por um único capacitor, cujo valor é determinado na sequência.

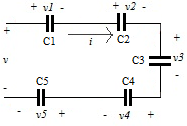
Usando a LKT, e considerando a tensão inicial em cada capacitor nula, temos:

Colocando em evidência, temos

Observando o circuito equivalente pretendido, que contém uma capacitância equivalente C*eq*, temos que a expressão de tensão é dada por:

logo,.

Formula geral:





**# Conexão Paralela**

Considere o circuito formado por um conjunto de capacitores, todos conectados em paralelo, como o apresentado na figura abaixo. A associação dos capacitores pode ser substituída por um único capacitor, cujo valor é determinado na sequência.

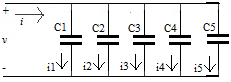
Usando a LKC, temos:

Colocando em evidência, temos

Observando o circuito equivalente pretendido, que contém uma capacitância equivalente *Ceq*, temos que a expressão de corrente é dada por:

logo,

Formula geral:



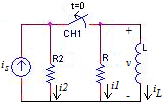


**## Circuitos de primeira ordem**

**# Circuito RL – Resposta Natural**

Na resposta natural o circuito RL funciona com a energia armazenada no indutor. No caso do circuito ser constituído por apenas um resistor e um indutor, após 10 constantes de tempo do circuito não restará nenhuma energia no circuito.

Considere o circuito apresentado na figura abaixo.



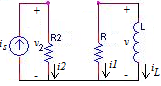
Condições iniciais do circuito antes de t=0:

* Chave fechada;
* Correntes e tensões constantes.

Com as correntes constantes o indutor está se comportando como um curto circuito, logo, toda a corrente *is* da fonte passa pelo mesmo e a tensão em todos os elementos é igual a zero.

Em t=0, a chave CH1 é aberta, com isso, a fonte e o resistor R2 são separados do resistor R e indutor L. Estes últimos componentes constituem um circuito RL, apresentando resposta natural.

Após a abertura da chave o indutor irá impor a corrente no circuito RL, dessa forma, para analisar o mesmo foram considerados os sentidos associados de corrente e tensão como mostrados na figura do circuito RL ao lado.

A partir da LKT, considerando queda de tensão positiva e percorrendo o circuito no sentido da corrente, temos

Desenvolvendo, temos

Integrando ambos os termos, temos

Aplicando a exponencial a ambos os termos, temos

Considerando que i(0) = *is*, temos

onde: , denominada de constante de tempo de um circuito RL;

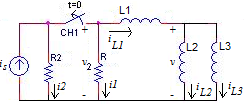
representa o instante logo após a comutação da chave (abertura da chave).

A verificação dos valores da expressão para t=0 e para t→∞ demonstra que os valores de corrente serão, respectivamente, *is* e 0.

OBS:

* Na resposta natural do circuito RL a constante de tempo determina o tempo de decaimento da corrente no indutor;
* Uma constante de tempo após o início de descarga do indutor a corrente no circuito RL é reduzida a (≈ 0,37 vezes o valor inicial)
* Após cinco constantes de tempo a corrente já caiu a menos de 1% do valor inicial;
* Em um circuito RL contendo mais de um indutor, sendo que pelo menos dois indutores estejam conectados em paralelo, como apresentado na figura abaixo, existe a possibilidade de em regime os indutores em paralelo armazenarem uma energia residual. Para determinar se existirá energia residual, deve-se determinar o indutor equivalente da associação de indutores e sua energia inicial. Em seguida deve-se determinar a energia inicial do circuito, para isso calcule a energia individual de cada indutor e some as mesmas. Se a energia inicial do circuito for maior que a energia inicial do indutor equivalente, então haverá energia residual nos indutores conectados em paralelo. Observe que pode haver energia em indutores em paralelo, pois os mesmos propiciam um caminho de circulação para a corrente, sem que esta passe por outro componente. Além disso, sendo a corrente constante, não será desenvolvida qualquer tensão entre os terminais dos indutores, pois os mesmos estarão se comportando como um curto circuito

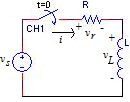
No circuito ao lado é possível haver energia nos indutores L2 e L3 na condição de regime, basta que a condição referente as energias, indicada acima, se verifique. Se houver as correntes *iL2* e *iL3* serão iguais. A corrente de L1 será nula, pois o mesmo está em série com o restante do circuito.



**# Circuito RL – Resposta ao Degrau**

Na resposta ao degrau o circuito RL funciona com uma fonte de tensão e/ou corrente alimentando o circuito de forma permanente, após um instante inicial. De forma equivalente a resposta natural, após 10 constantes de tempo o circuito apresentará condições de regime, ou seja, suas grandezas terão valores constantes.

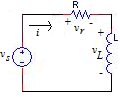
Considere o circuito apresentado na figura abaixo.



Condições iniciais do circuito antes de t=0:

* Chave aberta;
* Corrente nula.

Em t=0, a chave CH1 é fechada, como a corrente inicial do indutor era zero, essa condição é mantida após o fechamento da chave, já que o indutor impede que a corrente mude instantaneamente. Dessa forma, toda a tensão da fonte é aplicada instantaneamente sobre o indutor.



Após o fechamento da chave em t=0 e usando a LKT, considerando queda de tensão positiva e percorrendo o circuito no sentido da corrente, temos

Desenvolvendo, temos

Integrando ambos os termos, temos

Aplicando a exponencial a ambos os termos, temos

Considerando que i(0) = 0, temos

onde: , denominada de constante de tempo de um circuito RL;

representa o instante logo após a comutação da chave (fechamento da chave).

A verificação dos valores da expressão para t=0 e para t→∞ demonstra que os valores de corrente serão, respectivamente, 0 e .

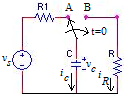
OBS:

* Na resposta ao degrau do circuito RL a constante de tempo determina o tempo de crescimento da corrente no indutor;
* Uma constante de tempo após o início de carga do indutor a corrente no circuito RL é igual a 1- (≈ 0,63 vezes o seu valor de regime)
* Após cinco constantes de tempo a corrente já atingiu mais de 99,3% do valor de regime.

**# Circuito RC – Resposta Natural**

Na resposta natural o circuito RC funciona com a energia armazenada no capacitor. No caso do circuito ser constituído por apenas um resistor e um capacitor, após 10 constantes de tempo do circuito não restará nenhuma energia no circuito.

Considere o circuito apresentado na figura abaixo.



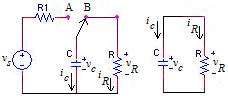
Condições iniciais do circuito antes de t=0:

* Chave na posição A;
* Correntes e tensões constantes.

Com as tensões constantes o capacitor está se comportando como um circuito aberto, assim, a tensão do capacitor é igual a tensão *vs* da fonte, não havendo corrente na malha formada pela fonte *vs*, R1 e o capacitor C.

Em t=0, a chave CH1 muda para a posição B, com isso, a fonte *vs* e o resistor R1 são desligados. Neste instante o resistor R e capacitor C passam a formar um circuito RC, apresentando resposta natural.

Após a mudança da chave para a posição B o capacitor irá impor a tensão no circuito RC, que provocará uma corrente que circulará por ambos os componentes. Para análise foram considerados os sentidos associados de corrente e tensão como mostrados na figura do circuito RC ao lado.



A partir da LKC, considerando as correntes saindo do nó superior do circuito e que correntes saindo serão positivas, temos

Desenvolvendo, temos

Integrando ambos os termos, temos

Aplicando a exponencial a ambos os termos, temos

Considerando que *vc(0)* = *vs*, temos

onde: , denominada de constante de tempo de um circuito RC;

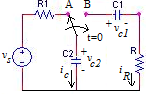
representa o instante logo após a comutação da chave (mudança da posição A para a posição B).

A verificação dos valores da expressão para t=0 e para t→∞ demonstra que os valores de tensão serão, respectivamente, *vs* e 0.

OBS:

* Na resposta natural do circuito RC a constante de tempo determina o tempo de decaimento da tensão do capacitor;
* Uma constante de tempo após o início de descarga do capacitor a tensão no mesmo é reduzida a (≈ 0,37 vezes o valor inicial)
* Após cinco constantes de tempo a tensão já caiu a menos de 1% do valor inicial.
* Em um circuito RC contendo mais de um capacitor, sendo que pelo menos dois capacitores estejam conectados em série, como apresentado na figura abaixo, existe a possibilidade de em regime os capacitores em série armazenarem uma energia residual. Para determinar se existirá energia residual, deve-se determinar o capacitor equivalente da associação de capacitores e sua energia inicial. Em seguida deve-se determinar a energia inicial do circuito, para isso calcule a energia individual de cada capacitor e some as mesmas. Se a energia inicial do circuito for maior que a energia inicial do capacitor equivalente, então haverá energia residual nos capacitores conectados em série. Observe que pode haver energia em capacitores em série, pois caso os mesmo possuam tensões iguais e de polaridade invertida a tensão no circuito entre os terminais dos capacitores será nula. Além disso, sob tensão constante capacitores se comportam como circuitos abertos

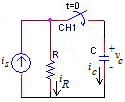
No circuito ao lado é possível haver energia nos capacitores C1 e C2 na condição de regime, após a chave mudar da posição “A” para a posição “B”, basta que a condição referente as energias, indicada acima, se verifique. Se houver as tensões *vc1* e *vc2* serão iguais em amplitude e com sinais contrários, dessa forma, a tensão sobre o resistor R1 será nula.



**# Circuito RC – Resposta ao Degrau**

Na resposta ao degrau o circuito RC funciona com uma fonte de tensão e/ou corrente alimentando o circuito de forma permanente, após um instante inicial. De forma equivalente a resposta natural, após 10 constantes de tempo o circuito apresentará condições de regime, ou seja, suas grandezas terão valores constantes.

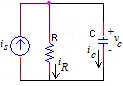
Considere o circuito apresentado na figura abaixo.



Condições iniciais do circuito antes de t=0:

* Chave aberta;
* Tensão no capacitor nula.

Em t=0, a chave CH1 é fechada, como a tensão inicial do capacitor era zero, essa condição é mantida após o fechamento da chave, já que o capacitor impede que a tensão entre os seus terminais mude instantaneamente. Dessa forma, toda a corrente da fonte é drenada pelo capacitor. Isso evita de passar qualquer corrente pelo resistor R, o que provocaria uma tensão em t=0+ diferente de zero.



Após o fechamento da chave em t=0 e usando a LKC, considerando corrente saindo de um nó positiva e considerando o nó superior do circuito, temos

Desenvolvendo, temos

Integrando ambos os termos, temos

Aplicando a exponencial a ambos os termos, temos

Considerando que = 0, temos

onde: , denominada de constante de tempo de um circuito RC;

representa o instante logo após a comutação da chave (fechamento da chave).

A verificação dos valores da expressão para t=0 e para t→∞ demonstra que os valores de tensão serão, respectivamente, 0 e .

OBS:

* Na resposta ao degrau do circuito RC a constante de tempo determina o tempo de crescimento da tensão no capacitor;
* Uma constante de tempo após o início de carga do capacitor a tensão no mesmo é igual a 1- (≈ 0,63 vezes o seu valor de regime)
* Após cinco constantes de tempo a tensão já atingiu mais de 99,3% do valor de regime.

**# Solução Geral – Circuitos RL e RC**

Circuitos de primeira ordem, do tipo RC ou RL, podem apresentar mais malhas do que os exemplos anteriormente apresentados. Nestes casos, caso seja possível minimizar os mesmos através de circuitos equivalentes Thévenin ou Norton, de modo que o circuito minimizado possa ser representado por alguma das topologias indicadas na figura abaixo, então é possível determinar a expressão de correntes e/ou tensões de capacitores e/ou indutores dos circuitos de primeira ordem através do uso da expressão geral:

onde:

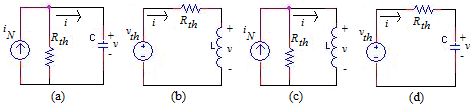
*x(t)* é a expressão no tempo de uma variável, corrente ou tensão, de interesse;

*x(∞)* é o valor de regime da variável selecionada;

*x(0)* é o valor inicial da variável selecionada;

*τ* é a constante de tempo do circuito RL ou RC.

Topologias de circuitos



Expressões:

(a)

(b)

(c)

(d)

Equação diferencial geral:

Como já discutido, após um período transitório, todas as grandezas dos circuitos de primeira ordem tendem para valores constantes no regime. Considerando isso, o termo da expressão geral tenderá para 0, logo, .

Resolvendo a equação diferencial teremos:

Integrando ambos os termos, temos

Aplicando a exponencial a ambos os termos, temos

Como , então

**## Resposta Crescente**

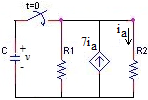
Das analises anteriores observa-se que a resposta dos circuitos de primeira ordem, RC ou RL, tendem para condições de regime constante, que podem ser nulas ou não, dependendo do tipo de resposta, natural ou ao degrau, bem como das condições iniciais de energia dos capacitores ou indutores, como também da topologia dos circuitos. Esse comportamento, no entanto, pode ser alterado quando são utilizadas fontes de tensão e/ou correntes dependentes. Este tipo de fonte poderá definir uma resistência equivalente de Thévenin “**NEGATIVA**”. Caso isso se verifique, as constantes de tempo que compõem o expoente dos termos exponenciais e que forçam os respectivos termos a zero quando *t→∞*, não mais proporcionaram este decaimento e o circuito apresentará uma resposta “**CRESCENTE**”.

Considere o circuito abaixo

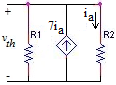
O capacitor possui uma energia inicial de modo que a sua tensão em *t=0-* é igual a 10V.

Os valores do componentes são: R1=10K, R2=20K e c=5μF.

Para determinar a expressão de *v(t)*, após a chave ser fechada, devemos determinar o circuito Thévenin visto dos terminais do capacitor.



**# Determinação da Tensão de Thévenin**



Observando o circuito ao lado, com o terminais onde deseja-se determinar a tensão de Thévenin já devidamente identificados, podemos calcular a respectiva tensão Thévenin. Analisando o circuito vemos que a tensão de Thévenin será igual a:

A fonte de corrente dependente precisa que *ia* seja diferente de zero para gerar, no entanto, isso não se verifica no circuito ao lado.

A razão pela qual a fonte de corrente *7ia* nada gera decorre do fato de que não há nenhuma fonte no circuito, após a retirada do capacitor, que forneça uma energia inicial para que o haja uma corrente ia inicial e daí para que a fonte *7ia* gere. Dessa forma, conclui-se que *ia=0* e por conseguinte *vth = 0*.

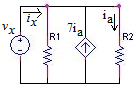
**# Determinação da Resistência equivalente Thévenin**

Pelas características do circuito de só possuir uma fonte de corrente dependente, o método adequado para a determinação da resistência equivalente Thévenin será o método 3, onde é inserida uma fonte auxiliar e todas as fontes independentes, caso haja, são eliminadas do circuito. Acrescentando a fonte auxiliar ao circuito, obtém-se o circuito da figura abaixo.

Pelo método 3 a resistência Thévenin será dada pela relação . Dessa forma, é necessário obter uma expressão para *vx* em função de *ix* ou vice-versa.

Analisando o circuito, percebe-se que todos os componentes estão em paralelo, assim

.



Desenvolvendo a equação anterior, temos

então

Substituindo os valores de R1 e R2, temos

O circuito equivalente Thévenin é apresentado abaixo. Observa-se apenas o capacitor e o resistor equivalente Thévenin. Como o resistor apresenta um valor negativo, a constante de tempo do circuito será igual a *τ=-0,025s*. A expressão da tensão v(t), que é a tensão do próprio capacitor, apresenta equação de uma resposta natural, ou seja, , como *τ=-0,025s*, temos que . Percebe-se pela expressão que a tensão do capacitor tenderá a crescer indefinidamente a medida que o tempo cresce, representando assim uma resposta “CRESCENTE”.

Deve-se perceber que apenas quando um circuito possuir fontes dependentes de tensão e/ou corrente, será possível a existência de uma resistência equivalente Thévenin negativa.

A resistência equivalente Thévenin pode ser interpretada como um elemento gerador de energia, o oposto de uma resistência real, positiva, que sempre será uma consumidora de energia.



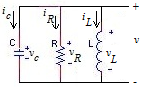
**## Circuitos de segunda ordem**

**# Circuito RLC paralelo – Resposta Natural**

Aplicando a análise nodal, temos

derivando

Considere o circuito abaixo



Solução geral da equação de segunda ordem.

Supor que a solução é da forma: , onde *A* e *s* são constantes. Substituindo na equação diferencial de segunda ordem, temos

isolando o termo , temos

onde é a equação característica da equação diferencial.

Raízes da equação característica

e

Soluções para a equação característica terão a forma

, e

A forma geral da solução para o circuito RLC paralelo será

onde *A1* e *A2* são determinados a partir das condições iniciais da tensão (se se estiver determinando a expressão de outra grandeza, então as condições iniciais serão as dessa grandeza).

Raízes da equação característica em termos de *α* e :

e

onde: (coeficiente de amortecimento) e (freqüência de ressonância)

Comportamento da resposta transitória do circuito de segunda ordem, RLC paralelo, em função dos valores de *α* e :

*α* > – Comportamento Superamortecido

*α* = – Comportamento Criticamente Amortecido

*α* < – Comportamento Subamortecido

**# Resposta Superamortecida – Raízes reais distintas**

Solução geral:

Condições iniciais: , tensão inicial do capacitor e

.

Aplicando a LKC, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *A1* e *A2*:

Substituindo por sua expressão em termos da corrente inicial do indutor e tensão inicial do capacitor, temos

assim

**# Resposta Criticamente Amortecida – Raízes reais iguais**

Solução geral:

OBS: A solução geral difere da solução Superamortecida porque com duas raízes reais idênticas, se aplicarmos as mesmas na solução geral , teremos efetivamente a expressão . No entanto, esta solução não garante de forma geral que as duas condições iniciais associadas ao problema possam ser satisfeitas simultaneamente. Com a alteração indicada pelo termo , a solução geral atenderá simultaneamente as condições iniciais: e .

Condições iniciais: , tensão inicial do capacitor e .

Aplicando a LKC, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *D1* e *D2*:

assim

OBS: Circuitos criticamente amortecidos são de difícil execução, dado que há uma grande dificuldade em conseguir valores comerciais que satisfaçam a relação *α* = , ou seja, .

**# Resposta Subamortecida – Raízes complexas conjugadas**

Solução geral:

onde:

Condições iniciais: , tensão inicial do capacitor e .

Aplicando a LKC, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *B1* e *B2*:

assim

Características da resposta subamortecida

* Resposta é oscilatória;
* Frequência de oscilação dada por ;
* Amplitude das oscilações diminui em função de , denominado coeficiente/fator de amortecimento;
* Quanto menor as perdas no circuito, maior a duração das oscilações e mais próximo de será ;
* Quando , as oscilações são mantidas indefinidamente.

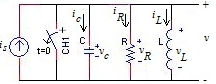
**OBS: Quando o circuito RLC paralelo funciona a partir da energia acumulada no indutor e/ou capacitor e com a presença do resistor no circuito, todas as grandezas do mesmo tenderão para 0 quando . Caso o circuito não tenha o resistor, que fará com que e a resposta seja subamortecida, todas as grandezas apresentarão um comportamento senoidal permanente, e oscilarão em torno de um valor médio zero.**

**# Circuito RLC paralelo – Resposta ao Degrau**

Aplicando a análise nodal, após a abertura da chave CH1, temos

derivando

Considere o circuito abaixo



Obtém-se a mesma equação diferencial para o caso de resposta natural. A solução da equação diferencial leva as três respostas transitórias já discutidas para a resposta natural, determinadas em função da relação existente entre *α* e .

*α* > – Comportamento Superamortecido

*α* = – Comportamento Criticamente Amortecido

*α* < – Comportamento Subamortecido

Também *α* e continuam sendo calculados pelas mesmas expressões determinadas para a resposta natural: e .

A diferença observada nas expressões da resposta ao degrau, comparativamente as expressões da resposta natural é a inclusão de um termo de valor final, como indicado nas equações a seguir.

**# Resposta Superamortecida – Raízes reais distintas**

Solução geral:

Condições iniciais: , tensão inicial do capacitor e

.

Aplicando a LKC, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *A1* e *A2*:

Substituindo por sua expressão em termos da corrente inicial do indutor e tensão inicial do capacitor, temos

assim

**# Resposta Criticamente Amortecida – Raízes reais iguais**

Solução geral:

OBS: A solução geral difere da solução Superamortecida porque com duas raízes reais idênticas, se aplicarmos as mesmas na solução geral , teremos efetivamente a expressão . No entanto, esta solução não garante de forma geral que as duas condições iniciais associadas ao problema possam ser satisfeitas simultaneamente. Com a alteração indicada pelo termo , a solução geral atenderá simultaneamente as condições iniciais: e .

Condições iniciais: , tensão inicial do capacitor e .

Aplicando a LKC, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *D1* e *D2*:

assim

OBS: Circuitos criticamente amortecidos são de difícil execução, dado que há uma grande dificuldade em conseguir valores comerciais que satisfaçam a relação *α* = , ou seja, .

**# Resposta Subamortecida – Raízes complexas conjugadas**

Solução geral:

onde:

Condições iniciais: , tensão inicial do capacitor e .

Aplicando a LKC, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *B1* e *B2*:

assim

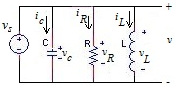
Características da resposta subamortecida

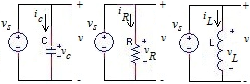
* Resposta é oscilatória;
* Frequência de oscilação dada por ;
* Amplitude das oscilações diminui em função de , denominado coeficiente/fator de amortecimento;
* Quanto menor as perdas no circuito, maior a duração das oscilações e mais próximo de será ;
* Quando , as oscilações são mantidas indefinidamente e o termo de valor final corresponde ao valor médio que a grandeza assumirá quando .

A seguir serão apresentadas algumas observações a cerca da resposta ao degrau do circuito RLC paralelo.

**OBS:**

* **Caso seja conectada uma fonte de tensão ao circuito RLC paralelo, como mostrado na figura ao lado, o circuito não se comportará como um circuito de segunda ordem, pois a fonte de tensão irá impor a tensão aos três componentes, fazendo assim com que as correntes *ic*, *iR* e *iL* fiquem unicamente definidas pela tensão da fonte. O circuito poderia ser analisado como três circuitos independentes, como os indicados na figura ao lado.**





* **Foi visto que o procedimento para determinação das expressões relativas à análise com reposta ao degrau ocorre de forma similar ao procedimento para resposta natural, no entanto, há a necessidade de incorporar o termo de regime. Observando o circuito RLC paralelo alimentado por uma fonte de corrente e considerando a presença do resistor, temos que em regime todas as grandezas do mesmo tenderão para valores constantes, logo, o capacitor em regime se comportará como um circuito aberto e o indutor como um curto circuito. Dessa forma, teremos toda a corrente da fonte, *is*, passando pelo indutor e a tensão desenvolvida entre os terminais do mesmo igual a zero, que, portanto, será o valor da tensão *v* e, por conseguinte, o valor de tensão em todos os componentes do circuito. Desta análise, infere-se os seguintes valores de regime:**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**

**Estes serão os valores de regime a serem acrescentados as expressões das respectivas grandezas;**

* **No caso em que o resistor não estiver presente no circuito, como já discutido, o circuito apresentará uma resposta subamortecida com oscilação permanente. Neste caso, não haverá um valor de regime constante para as grandezas do circuito e sim um valor médio, em torno do qual as grandezas oscilarão. Para o caso em que o circuito RLC paralelo é alimentado por uma fonte de corrente teremos os seguintes valores médios para as tensões e correntes do circuito:**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**

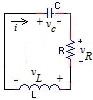
**Uma regra simples que pode ser seguida para determinar o valor médio das grandezas quando a reposta é subamortecida com oscilação permanente é verificar quais seriam os valores de regime das grandezas se o resistor estivesse inserido no circuito. Esses valores encontrados serão os valores médios apresentados pelas grandezas na resposta subamortecida com oscilação permanente. Os valores médios serão os valores de regime a serem acrescentados as respectivas equações das grandezas.**

**# Circuito RLC série – Resposta Natural**

Aplicando a análise de malhas, temos

derivando

Considere o circuito abaixo



Solução geral da equação de segunda ordem.

Supor que a solução é da forma: , onde *A* e *s* são constantes. Substituindo na equação diferencial de segunda ordem, temos

isolando o termo , temos

onde é a equação característica da equação diferencial.

Raízes da equação característica

e

Soluções para a equação característica terão a forma

, e

A forma geral da solução para o circuito RLC série será

onde *A1* e *A2* são determinados a partir das condições iniciais da corrente (se se estiver determinando a expressão de outra grandeza, então as condições iniciais serão as dessa grandeza).

Raízes da equação característica em termos de *α* e :

e

onde: (coeficiente de amortecimento) e (freqüência de ressonância)

Comportamento da resposta transitória do circuito de segunda ordem, RLC série, em função dos valores de *α* e :

*α* > – Comportamento Superamortecido

*α* = – Comportamento Criticamente Amortecido

*α* < – Comportamento Subamortecido

**# Resposta Superamortecida – Raízes reais distintas**

Solução geral:

Condições iniciais: , corrente inicial do indutor e

.

Aplicando a LKT, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *A1* e *A2*:

Substituindo por sua expressão em termos da corrente inicial do indutor e tensão inicial do capacitor, temos

assim

**# Resposta Criticamente Amortecida – Raízes reais iguais**

Solução geral:

OBS: A solução geral difere da solução Superamortecida porque com duas raízes reais idênticas, se aplicarmos as mesmas na solução geral , teremos efetivamente a expressão . No entanto, esta solução não garante de forma geral que as duas condições iniciais associadas ao problema possam ser satisfeitas simultaneamente. Com a alteração indicada pelo termo , a solução geral atenderá simultaneamente as condições iniciais: e .

Condições iniciais: , corrente inicial do indutor e .

Aplicando a LKT, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *D1* e *D2*:

assim

OBS: Circuitos criticamente amortecidos são de difícil execução, dado que há uma grande dificuldade em conseguir valores comerciais que satisfaçam a relação *α* = , ou seja, .

**# Resposta Subamortecida – Raízes complexas conjugadas**

Solução geral:

onde:

Condições iniciais: , corrente inicial do indutor e .

Aplicando a LKT, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *B1* e *B2*:

assim

Características da resposta subamortecida

* Resposta é oscilatória;
* Frequência de oscilação dada por ;
* Amplitude das oscilações diminui em função de , denominado coeficiente/fator de amortecimento;
* Quanto menor as perdas no circuito, maior a duração das oscilações e mais próximo de será ;
* Quando , as oscilações são mantidas indefinidamente.

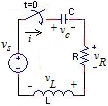
**OBS: Quando o circuito RLC série funciona a partir da energia acumulada no indutor e/ou capacitor e com a presença do resistor no circuito, todas as grandezas do mesmo tenderão para 0 quando . Caso o circuito não tenha o resistor, que fará com que e a resposta seja subamortecida, todas as grandezas apresentarão um comportamento senoidal permanente, e oscilarão em torno de um valor médio zero.**

**# Circuito RLC série – Resposta ao Degrau**

Aplicando a análise de malha, após o fechamento da chave CH1, temos

derivando

Considere o circuito abaixo



Obtém-se a mesma equação diferencial para o caso de resposta natural. A solução da equação diferencial leva as três respostas transitórias já discutidas para a resposta natural, determinadas em função da relação existente entre *α* e .

*α* > – Comportamento Superamortecido

*α* = – Comportamento Criticamente Amortecido

*α* < – Comportamento Subamortecido

Também *α* e continuam sendo calculados pelas mesmas expressões determinadas para a resposta natural: e .

A diferença observada nas expressões da resposta ao degrau, comparativamente as expressões da resposta natural é a inclusão de um termo de valor final, como indicado nas equações a seguir.

**# Resposta Superamortecida – Raízes reais distintas**

Solução geral:

Condições iniciais: , corrente inicial do indutor e

.

Aplicando a LKT, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *A1* e *A2*:

Substituindo por sua expressão em termos da corrente inicial do indutor e tensão inicial do capacitor, temos

assim

**# Resposta Criticamente Amortecida – Raízes reais iguais**

Solução geral:

OBS: A solução geral difere da solução Superamortecida porque com duas raízes reais idênticas, se aplicarmos as mesmas na solução geral , teremos efetivamente a expressão . No entanto, esta solução não garante de forma geral que as duas condições iniciais associadas ao problema possam ser satisfeitas simultaneamente. Com a alteração indicada pelo termo , a solução geral atenderá simultaneamente as condições iniciais: e .

Condições iniciais: , corrente inicial do indutor e .

Aplicando a LKT, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *D1* e *D2*:

assim

OBS: Circuitos criticamente amortecidos são de difícil execução, dado que há uma grande dificuldade em conseguir valores comerciais que satisfaçam a relação *α* = , ou seja, .

**# Resposta Subamortecida – Raízes complexas conjugadas**

Solução geral:

onde:

Condições iniciais: , corrente inicial do indutor e .

Aplicando a LKT, temos: , então,

Determinação dos coeficientes *B1* e *B2*:

assim

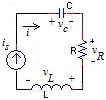
Características da resposta subamortecida

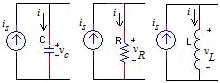
* Resposta é oscilatória;
* Frequência de oscilação dada por ;
* Amplitude das oscilações diminui em função de , denominado coeficiente/fator de amortecimento;
* Quanto menor as perdas no circuito, maior a duração das oscilações e mais próximo de será ;
* Quando , as oscilações são mantidas indefinidamente e o termo de valor final corresponde ao valor médio que a grandeza assumirá quando .

A seguir serão apresentadas algumas observações a cerca da resposta ao degrau do circuito RLC série.

**OBS:**

* **Caso seja conectada uma fonte de corrente ao circuito RLC série, como mostrado na figura ao lado, o circuito não se comportará como um circuito de segunda ordem, pois a fonte de corrente irá impor a corrente aos três componentes, fazendo assim com que as tensões *vc*, *vR* e *vL* fiquem unicamente definidas pela corrente da fonte. O circuito poderia ser analisado como três circuitos independentes, como os indicados na figura ao lado.**





* **Foi visto que o procedimento para determinação das expressões relativas à análise com reposta ao degrau ocorre de forma similar ao procedimento para resposta natural, no entanto, há a necessidade de incorporar o termo de regime. Observando o circuito RLC série alimentado por uma fonte de tensão e considerando a presença do resistor, temos que em regime todas as grandezas do mesmo tenderão para valores constantes, logo, o capacitor em regime se comportará como um circuito aberto e o indutor como um curto circuito. Dessa forma, teremos toda a tensão da fonte, *vs*, aplicada ao capacitor e a corrente no circuito igual a zero. Desta análise, infere-se os seguintes valores de regime:**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**

**Estes serão os valores de regime a serem acrescentados as expressões das respectivas grandezas;**

* **No caso em que o resistor não estiver presente no circuito, como já discutido, o circuito apresentará uma resposta subamortecida com oscilação permanente. Neste caso, não haverá um valor de regime constante para as grandezas do circuito e sim um valor médio, em torno do qual as grandezas oscilarão. Para o caso em que o circuito RLC série é alimentado por uma fonte de tensão teremos os seguintes valores médios para as tensões e correntes do circuito:**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**
  + **;**

**Uma regra simples que pode ser seguida para determinar o valor médio das grandezas quando a reposta é subamortecida com oscilação permanente é verificar quais seriam os valores de regime das grandezas se o resistor estivesse inserido no circuito. Esses valores encontrados serão os valores médios apresentados pelas grandezas na resposta subamortecida com oscilação permanente. Os valores médios serão os valores de regime a serem acrescentados as respectivas equações das grandezas.**

**## Aplicação do método da Superposição a circuitos de 1a e 2a ordem**

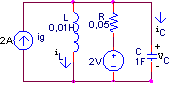
Nas seções anteriores foram apresentadas as expressões que podem representar o comportamento temporal de correntes e/ou tensões em circuitos de 1a e 2a ordem. Em todos os casos analisados, para fins de desenvolvimento das expressões, foram utilizados circuitos alimentados com apenas uma fonte independente, de corrente ou tensão. Esta estrutura com apenas uma fonte não se coloca como uma regra, sendo que é possível ter circuitos de 1a e 2a ordem, com as estruturas apresentadas anteriormente e para as quais as equações desenvolvidas são válidas, alimentados com mais de uma fonte independente, inclusive com fontes de tipos diferentes (corrente e tensão).

Quando o circuito a ser analisado apresenta mais de uma fonte a sua analise pode ser realizada considerando a ação conjunta de todas as fontes, mas também, a partir do método da superposição, é possível analisar circuitos lineares invariantes no tempo considerando a ação isolada de cada fonte de alimentação e por fim, realizando a soma das componentes das grandezas calculadas. Como os circuitos de 1a e 2a ordem atendem aos requisitos de linearidade e invariância no tempo (componentes não alteram suas características ao longo do tempo), então a aplicação do método da superposição é possível na análise desses circuitos.

Ao usar o método da superposição na análise dos circuitos de 1a e 2a ordem deve-se atentar para o fato de que as condições iniciais de capacitores e/ou indutores só podem ser consideradas uma única vez ao desmembrar a análise em várias sub-análises, de acordo com o número de fontes existentes no circuito. Para explicitar o fato acima mencionado, bem como a aplicação do método da superposição aos circuitos de 1a e 2a ordem, considere o circuito exemplo a seguir.

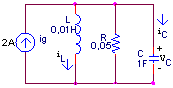
A tensão inicial do capacitor é 5V e a corrente inicial do indutor é 1A, com os sentidos e polaridades indicadas na figura.

Veremos que o circuito poderá ser analisado como um circuito RLC paralelo.



Aplicando o método da superposição e realizando a análise do circuito considerando inicialmente apenas a ação da fonte de corrente de 2A, temos o seguinte circuito após eliminar a fonte de tensão (curto-circuito dos terminais da fonte de tensão).

Trata-se de analisar a resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo, alimentando por uma fonte de corrente de 2A. Para este caso, considerando que nos interessa determinar a expressão da tensão *vc(t)*, devemos verificar o tipo de resposta transitória do circuito a partir dos valores de R, L e C.



Para o circuito RLC paralelo, temos que : e . Para os valores de R, L e C do circuito, temos que e . Portanto, trata-se de uma resposta criticamente amortecida, logo, uma expressão para *vc(t)*, será:

Para o circuito em questão, sabendo que no regime o indutor se comportará como um curto-circuito e o capacitor se comportará como um circuito aberto, temos que , assim, . Para determinação de *D1* e *D2* devemos considerar as condições iniciais do capacitor e indutor. Neste ponto, caso consideremos as duas condições iniciais, tensão inicial do capacitor e corrente do indutor, para a determinação da componente de , quando apenas a fonte de corrente de 2A está atuando no circuito, quando formos determinar a componente de , quando apenas a fonte de tensão de 2V estiver atuando no circuito, as condições iniciais, tensão do capacitor e corrente do indutor, deverão ser consideradas nulas, caso contrário, a ação dessas condições iniciais estariam sendo consideradas duas vezes. Considerando as condições iniciais na determinação da componente de , para a fonte de corrente, temos:

.

=> , então

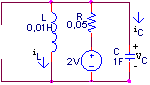
Assim

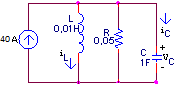
. Essa componente deverá ser somada a componente da tensão , resultante da ação da fonte de tensão de 2V. Na determinação dessa componente os valores iniciais de tensão do capacitor e corrente do indutor não mais serão considerados, haja visto os mesmos já terem sido considerados na determinação da componente acima calculada.

Aplicando o método da superposição e realizando a análise do circuito considerando a ação da fonte de tensão de 2V, temos o seguinte circuito após eliminar a fonte de corrente (abertura dos terminais da fonte de corrente).

Para deixar o circuito no formato dos componentes em paralelo, pode ser realizada uma transformação de fontes, substituindo a fonte de tensão de 2V, em série com o resistor R, por uma fonte de corrente de 40A, em paralelo com o resistor R. Esse circuito é apresentando ao lado, abaixo do circuito original. A partir do resultado anterior, podemos determinar que , onde:

, e



****

=> , então , então,

.

A expressão completa de , será: , então

**## Fator de Qualidade (Q)**

Por definição:

Circuito RLC paralelo:

Circuito RLC Série:

O fator de qualidade indica o nível de amortecimento de um circuito RLC, quanto menor o amortecimento maior o valor de *Q*, no limite, quando o amortecimento , .

O fator de qualidade também pode ser interpretado em termos de energia. Nesta interpretação, o fator de qualidade representa a relação entre a energia que é transferida de um elemento armazenador para outro (capacitor→indutor e vice-versa) e a energia que é dissipada nesta transferência. Como o tempo de observação é o mesmo, a relação pode ser dada em termos da potência reativa, que representa a energia transferida e a potência média ativa, que representa a energia dissipada. Quanto menor o valor da potência dissipada para um mesmo valor de potência reativa, maior o fator *Q*.

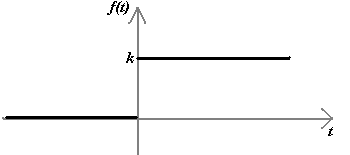
**## Função Degrau {}**

Considere o gráfico da função *f(t)* indicado abaixo. Esta função é denominada de função degrau, a qual se caracteriza por uma transição (descontinuidade da curva) em um dado instante *t*. No caso indicado no gráfico, a transição ocorre em *t=0*. Caso o valor de *k* seja igual a 1, então a função recebe a denominação de *função degrau unitário*, sendo representada por *u(t)*.

Função degrau (transição em t=0):

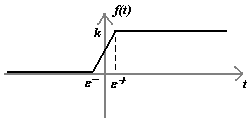
observe que não é definido o valor em t=0

Função degrau unitário

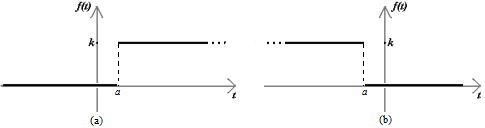


OBS: A função degrau não é definida em t=0, no entanto, sob determinadas condições, pode-se definir a mesma entre os instantes e , com , como uma função linear.

Função degrau (transição em t=0):



A função degr au pode apresentar instantes de transição diferentes de t=0, neste caso, as mesmas são representadas graficamente nas formas indicadas a seguir.

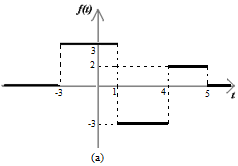


Para a função degrau representada no gráfico (a), temos:

Para a função degrau representada no gráfico (b), temos:

Observe que a função degrau, quer seja representada pelo gráfico (a), quer seja representada pelo gráfico (b), apresentará valor sempre que o seu argumento, ou for .

As funções degrau podem ser usadas para representar funções pulso, como será exemplificado a seguir. Considere a função f(t), cuja representação gráfica é apresentada a seguir



Pode ser mostrado que a função pulso f(t) pode ser representada pela soma das seguintes funções degrau:

;

;

;

, sendo

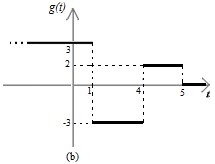
A função pulso g(t) pode ser representada pela soma das seguintes funções degrau:

;

;

;

, sendo



**## Função Impulso {}**

**# Definição:**

, para (função impulso na origem). Quando o calculo da integral tende a 1, ou seja, k=1, a função impulso é denominada *função impulso unitário*. Quando a área não é unitária, a constante “k” é denominada *intensidade da função impulso*.

Para um impulso fora da origem, temos .

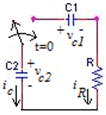
Características da função impulso:

1. Amplitude infinita;
2. Duração zero;
3. Área constante.

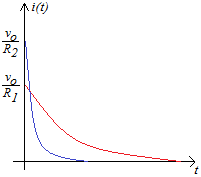
OBS: Apesar de fisicamente não existir esta função na natureza, na forma exata da sua definição, alguns eventos como uma descarga elétrica (raio) e eventos gerados pela comutação em circuitos elétricos (abertura dos pólos de uma disjuntor, ou abertura de elo fusível – canela), aproximam-se do comportamento da função impulso. Para exemplificar a afirmação anterior, considere um circuito RC formado por dois capacitores,um resistor e uma chave, todos ligados em série, como mostrado no circuito abaixo.

Considere que o capacitor C1 possui uma carga aramzenada, de modo que a sua tensão inicial . Da análise de circuitos de 1a ordem anteriormente apresentada, temos que a expressão de corrente para o referido circuito será:

, onde , sendo que .



Agora, considere o comportamento da corrente na medida em que o valor de R tende a zero, para isso, usemos a representação gráfica da expressão da corrente determinada acima.



No gráfico ao lado, considerando a tensão inicial , foram traçadas duas curvas de corrente variando-se o valor do resistor *R*, onde o resistor *R1* é maior que o resistor *R2*. Observa-se a partir do gráfico que o valor inicial da corrente cresce na medida que o resistor diminui. Também pode ser observado que o tempo que a corrente leva para atingir o seu valor de regime, 0A, diminui. Isso pode ser comprovado pelo fato de que a constante de tempo do circuito diminui com a diminuição de *R*.

Avaliando o comportamento da corrente do circuito RC acima, quando o resistor tende para zero, será observado que a mesma terá um comportamento impulsivo, ou seja, a corrente será uma função impulso. Para comprovar essa afirmação, a função de i(t) terá que satisfazer as três condições listadas para uma função impulso de forma simultânea.

1. Condição 1 – Amplitude infinita

Observando a expressão de , percebe-se que se , então ;

1. Condição 2 – Duração tende a zero

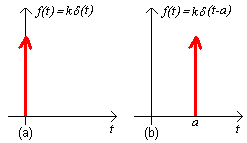
Observando a constante de tempo da curva , dado por , percebe-se que se , então ;

1. Condição 3 – Área constante

Integrando a expressão de , no intervalo , temos:

Observa-se que a integral é constante e independe do termo que tende a zer, neste caso, o valor de R. Assim, confirma-se o comportamento impulsivo da corrente no circuito RC, resposta natural, quando não há o resistor. Esse comportamento impulsivo da corrente, faz com que a tensão nos dois capacitores varie na forma de um degrau, como será explicado mais adiante.

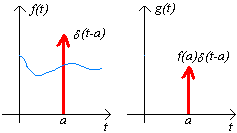
Representação da função impulso: (a) na origem e (b) deslocada da origem:



OBS: A função impulso pode ser considerada a derivada da função degrau no instante da transição.

**# Propriedade de Filtragem**

Considere uma função *f(t)* contínua no intervalo , então



Demonstração:

em , logo

**## Transformada de Laplace**

Através da Transformada de Laplace será possível representar sistemas de equações diferenciais no domínio do tempo em sistemas de equações algébricas no domínio “S” (domínio da freqüência, visto que S tem unidade de .

Definição da Transformada de Laplace

Como o expoente de deve ser adimensional, então (freqüência)

Obs:

* A integral da transformada de Laplace é imprópria (limite superior ), logo, nem todas as funções *f(t)* possuem uma transformada de Laplace;
* Como o limite inferior é zero, o comportamento de f(t0 para t<0 é ignorado (transformada de Laplace unilateral);
* Se f(t) apresenta uma descontinuidade em t=0 e se esta descontinuidade não for uma função Impulso, , então .

**# Transformadas Funcionais**

1. Transformada de Laplace da função degrau {}
2. Transformada de Laplace da função exponencial {}
3. Transformada de Laplace da função impulso unitário {}
4. Transformada de Laplace da derivada primeira da função impulso unitário {}

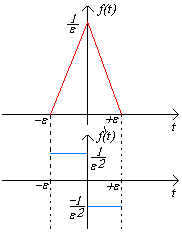
, quando

,

Aplica-se a regra de l’Hôpital duas vezes para remover indeterminações do tipo .

,

=



**# Transformadas Operacionais**

1. Multiplicação por uma constante

Considere a função , cuja transformada de Laplace é dada por , então ;

1. Adição

Considere as funções e , cujas transformadas de Laplace são dadas por e , então . De forma geral

1. Derivada

Seja e o valor inicial de , então . Para derivadas de ordem superior considere que , então , mas

, logo

Como regral geral, temos: .

1. Integração

Seja , então . Realizando a Integral por partes, temos:

1. Deslocamento em S

Seja , então .

1. Mudança de escala

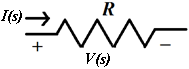
Seja , então , para a>0

**## Componentes básicos no domínio S**

**# Representação do resistor no domínio S**

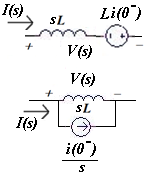
No domínio *“t”* a relação entre a corrente e a tensão em um resistor é dada pela lei de Ohm, podendo ser expressa por: , onde *R* é uma constante. Considere que e que . Aplicando as transformadas operacionais de Laplace a expressão de , temos: . Então ou .

A partir da expressão de , determinada acima, observa-se que o resistor é representada no domínio *“S”* da mesma forma como é representado no domínio *“t”*.



**# Representação do indutor no domínio S**

No domínio *“t”* a relação entre a corrente e a tensão em um indutor é dada pela expressão: , onde *L* é uma constante. Considere que e que . Aplicando as transformadas operacionais de Laplace a expressão de , temos: . Então , onde é a corrente inicial no indutor.

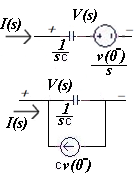


A partir da expressão de , podemos determinar uma expressão para , dada por: . As expressões de e definem os dois modelos que podem ser utilizados para representação do indutor no domínio *“S”*. A partir da expressão de o indutor é representado por uma componente de resistência em série com uma fonte de tensão , cuja polaridade é contrária a polaridade da tensão de referência do indutor (polaridade observada no circuito original em *“t”*).

A partir da expressão de o indutor é representado por uma componente de resistência em paralelo com uma fonte de corrente , cujo sentido da corrente está em concordância com o sentido da corrente de referência do indutor (sentido de corrente observada no circuito original em *“t”*). Observe que a mudança de uma representação para a outra pode ser feita aplicando o conceito de transformação de fontes, visto para os circuitos resistivos. Neste caso do indutor representado em *“S”*, o resistor é o elemento .

**# Representação do capacitor no domínio S**

No domínio *“t”* a relação entre a corrente e a tensão em um capacitor é dada pela expressão: , onde *C* é uma constante. Considere que e que . Aplicando as transformadas operacionais de Laplace a expressão de , temos: . Então , inde é a tensão inicial no capacitor.



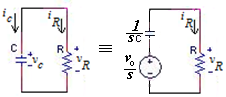
A partir da expressão de , podemos determinar uma expressão para , dada por: . As expressões de e definem os dois modelos que podem ser utilizados para representação do capacitor no domínio *“S”*. A partir da expressão de o capacitor é representado por uma componente de resistência em série com uma fonte de tensão , cuja polaridade esta em concordância com a polaridade da tensão de referência do capacitor (polaridade observada no circuito original em *“t”*).

A partir da expressão de o capacitor é representado por uma componente de resistência em paralelo com uma fonte de corrente , cujo sentido da corrente é contrário ao sentido da corrente de referência do capacitor (sentido de corrente observada no circuito original em *“t”*). Observe que a mudança de uma representação para a outra pode ser feita aplicando o conceito de transformação de fontes, visto para os circuitos resistivos. Neste caso do capacitor representado em *“S”*, o resistor é o elemento .

**## Exemplos de aplicação da Transformada de Laplace na análise de circuitos.**

**#Resposta Natural – Circuito de 1a ordem RC**

Considere o circuito abaixo, onde a tensão inicial do capacitor é

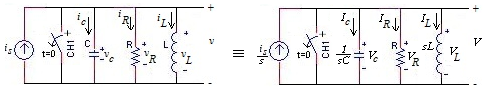


Aplicando a transformação de Laplace aos componentes do circuito, obtem-se o circuito equivalente em *“S”*. Escrevendo a equação a partir da LKT para o circuito em *“S”*, temos:

Cuja transformada inversa de Laplace é dada por:

**#Resposta ao Degrau – Circuito de 2a ordem RLC paralelo**

Considere o circuito abaixo, onde a tensão inicial do capacitor e a corrente inicial do indutor são nulas.



Observe que na transformação da fonte de corrente para o domínio *“S”* a mesma foi considerada como tendo um comportamento de degrau . Esse comportamento deve-se ao fato do circuito formado pelos componentes R, L e C, conectados em paralelo, ser excitado pela fonte apenas após a abertura da chave CH1, o que ocorre no instante *t=0*. No intervalo de , sobre o circuito não há atuação da fonte de corrente e no intervalo de , atua uma corrente de amplitude , logo, função que representa o comportamento da fonte de corrente para o circuito RLC paralelo é , cuja transformada de Laplace é dada por: .

Aplicando a análise nodal ao circuitos, obtém-se a seguinte equação:

. Considerando que as raízes da equação do segundo grau do denominador sejam dadas por , temos que:

Expandindo a expressão de *V* em frações parciais teremos:

Cuja transformada inversa de Laplace é dada por:

Se as raízes forem reais distintas, teremos uma resposta superamortecida. Se as raízes forem complexas conjugadas, teremos uma resposta subamortecida. Para o caso de raízes reais idênticas a expressão de *V(S)* seria dada por:

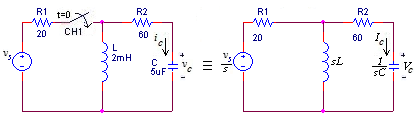
Cuja transformada inversa de Laplace é dada por:

, que representa uma resposta transitória criticamente amortecida. Para determinação do termo foi usada a transformada de Laplace operacional:

1. Derivada de primeira ordem em *“S”* - , onde .
2. Derivada de ordem *“n”* em *“S”* - , onde .

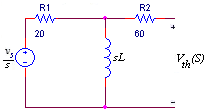
**# Determinação de circuito equivalente Thévenin**

Considere o circuito abaixo, cujo equivalente no domínio *“S”* é apresentado ao lado (tensão inicial do capacitor e corrente inicial do indutor foram consideradas nulas). Para o circuito em *“S”*, pede-se determinar o equivalente Thévenin visto dos terminais do capacitor. Observe que a fonte de tensão de amplitude , em função da comutação da chave CH1, apresenta-se para o circuito na forma de um degrau, dessa forma, sua representação em “S” será , como indicado no circuito.

****

Para a determinação da tensão equivalente Thévenin em *“S”* temos que desconectar o capacitor do circuito, deixando os pontos de conexão do mesmo abertos. Isso é mostrado no circuito abaixo.

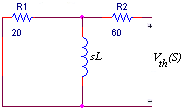
Com os terminais do circuito onde o capacitor estava conectado abertos, não há circulação de corrente pelo resistor *R2*, logo, o mesmo não tem influência na tensão . Esta será definida pelo divisor de tensão formado pelo resistor *R1* e pela resistência equivalente do indutor *sL*. Assim, a expressão de , será dada por:



. A expressão da tensão equivalente Thévenin no domínio do tempo será dada por: .

Para a determinação da resistência equivalente Thévenin em *“S”* podemos aplicar o método 1, visto que no circuito há apenas fontes independentes (uma fonte de tensão) e resistências.

Aplicando o método 1 para determinação da resistência equivalente Thévenin, devemos curto-circuitar a fonte de tensão. Dessa forma, obtém-se o circuito ao lado. Percebe-se que a resistência equivalente Thévenin, vista dos terminais de conexão do capacitor, será dada pela associação em paralelo do resistor *R1* com a resistência equivalente do indutor em *“S”*, *sL*, e está resistência resultante, em série com o resistor *R2*.



A expressão de será dada por: . A expressão da resistência equivalente Thévenin no domínio do tempo será dada por: . Observe que como já havia sido salientado na explicação sobre o circuito equivalente Thévenin, a resistência equivalente Thévenin representa o comportamento do circuito em torno do ramo/componente que foi excluído do circuito original e não simplesmente uma resistência.

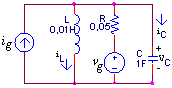
**# Superposição em S**

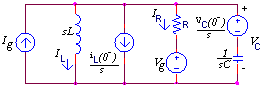
O uso do método da superposição na análise de circuitos contendo indutores e/ou capacitores, quando convertidos para o domínio *“S”*, segue o mesmo procedimento apresentado para os circuitos apenas resistivos. Deve ser observado, no entanto, que no caso dos circuitos com indutores e/ou capacitores, estes, ao serem convertidos para o domínio *“S”* podem dar origem a fontes de tensão e/ou corrente que também serão independentes. Assim, o número de fontes, cuja operação isolada deverá ser considerada ao aplicar o método da superposição, será igual a soma das fontes independentes com origem no circuito no domínio do tempo, mais as fontes originadas a partir das condições iniciais dos indutores e/ou capacitores quando o mesmo é representando no domínio *“S”*.

Para exemplificar o uso do método da superposição no domínio *“S”*, considere o circuito abaixo. Para fins de exemplificação, serão consideradas as seguintes condições iniciais para o indutor e capacitor:

A tensão inicial do capacitor é 5V e a corrente inicial do indutor é 1A, com os sentidos e polaridades indicadas na figura.

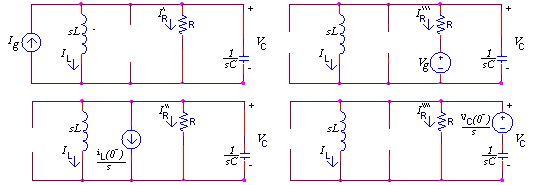
Deve ser observado que tanto a fonte de tensão , como a fonte de corrente , não tiveram as suas respectivas funções definidas. As mesmas representam genericamente uma fonte de tensão e uma fonte de corrente que podem assumir qualquer função. Neste caso, quando as referidas fontes forem convertidas para o domínio *“S”*, serão usadas funções também genéricas em *“S”* para representar suas respectivas transformadas de Laplace. Assim, a representação do circuito em *“S”* é apresentada no circuito ao lado.





No circuito equivalente no domínio *“S”*, mostrado acima, o indutor foi representado pelo seu equivalente com fonte de corrente em paralelo com a resistência equivalente do indutor *sL* e o capacitor foi representado pelo seu equivalente com fonte de tensão em série com a resistência equivalente do capacitor .

Considere que fosse desejado determinar a expressão da corrente *IR*, aplicando o princípio da superposição, teríamos 4 componentes para a grandeza *IR*, determinadas para cada um dos 4 circuitos apresentados a seguir, onde apenas uma fonte independente, em *“S”*, atua por vez.



**## Expansão em Frações Parciais**

Determinação da transformada inversa de Laplace de uma função racional (própria ou imprópria), dada por:

,

onde *“a”* e *“b”* são constantes reais e *“m”* e *“n”* são números inteiros positivos. Para uma função racional própria, temos que *m>n*. Para uma função racional imprópria, temos que *m≤n*.

**# Caso 1 – Função racional própria com raízes reais e distintas de D(S)**

1. Há uma fração do tipo para cada raiz *sx* do polinômio D(S);
2. O coeficiente *kx* de cada fração é obtido multiplicando os membros da identidade pelo termo *(s+sx)* da fração cujo *kx* está sendo determinado;
3. Na sequência o valor dos dois membros da igualdade são determinados, substituindo o termo *“s”* pelo valor da raiz do denominador da fração cujo *kx* está sendo determinado.

Exemplo: Considere a função . Trata-se de uma função racional própria cujas raízes do denominador da expressão são todas distintas. Assim, *F(s)* poderá ser representada por: .

1. Determinação de *k1*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s=0*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k2*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s=-8*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k3*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s=-6*, temos

=> . Logo,

Conclui-se que , pode ser representada por . A transformada inversa de Laplace de *F(S)* será dada por: .

**# Caso 2 – Função racional própria com raízes complexas e distintas de D(S)**

1. Mesmo procedimento para raízes reais e distintas (operando com números complexos).

Exemplo: Considere a função . Trata-se de uma função racional própria cujas raízes do denominador da expressão são todas distintas. Assim, *F(s)* poderá ser representada por: .

1. Determinação de *k1*:

Multiplicando , por (, temos

. Substituindo na identidade *s=-6*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k2*:

Multiplicando , por (, temos

. Substituindo na identidade *s=-3+4j*, temos

=> . Logo, .

1. Determinação de *k3*:

Multiplicando , por (, temos

. Substituindo na identidade *s=-3-4j*, temos

=> . Logo, .

Observe que *K2* e *K3* são complexos conjugados. Esse resultado será observado no calculo dos coeficientes *Kx* de frações que são complexas conjugadas, como no caso do exemplo. Outra observação a ser destacada é que sempre que o circuito for fisicamente realizável, as raízes complexas serão conjugadas.

Conclui-se que , pode ser representada por . A transformada inversa de Laplace de *F(S)* será dada por: . Desenvolvendo-se a expressão em *t*, temos:

**# Caso 3 – Função racional própria com raízes reais repetidas de D(S)**

1. Para cada raiz do denominador que tenha multiplicidade *“r”*, haverá igual número de frações, dados por ;
2. Para obter o coeficiente *kr* da fração com raiz de multiplicidade *“r”*, deve-se multiplicar a identidade pelo termo ;
3. Na sequência o valor dos dois membros da igualdade são determinados, substituindo o termo *“s”* pelo valor da raiz de multiplicidade *“r”*;
4. Os outros *“r-1”* coeficientes das frações da raiz de multiplicidade *“r”* são determinados derivando-se a equação obtida no passo (b) de forma recorrente, ou seja, para determinar o *kr-1*, deriva-se a expressão obtida no passo (b). Para determinar o *kr-2*, deriva-se a expressão obtida no passo (b) duas vezes e assim sucessivamente;
5. Após a determinação da derivada, o valor da raiz de multiplicidade “r” é substituída na expressão da derivada da identidade.

Exemplo: Considere a função . Trata-se de uma função racional própria, que apresenta no denominador raízes reais repetidas. Assim, *F(s)* poderá ser representada por: .

1. Determinação de *k1*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s=0*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k2*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s = -5*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k3*:

Multiplicando , por , temos

. Calculando a derivada primeira da identidade em relação a *“s”*, temos

. Substituindo na derivada da identidade *s = -5*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k4*:

Multiplicando , por , temos

. Calculando a derivada segunda da identidade em relação a *“s”*, temos

Derivada primeira: ;

Derivada segunda: . Substituindo na derivada segunda da identidade *s=-5*, temos

=> . Logo,

Conclui-se que , pode ser representada por . A transformada inversa de Laplace de *F(S)* será dada por: .

**# Caso 4 – Função racional própria com raízes complexas repetidas de D(S)**

1. Mesmo procedimento para raízes reais repetidas (operando com números complexos).

Exemplo: Considere a função . Trata-se de uma função racional própria, que apresenta no denominador raízes complexas repetidas. Assim, *F(s)* poderá ser representada por: .

1. Determinação de *k1*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s=-3+4j*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k2*:

Multiplicando , por , temos

. Calculando a derivada primeira da identidade em relação a *“s”*, temos

.

Substituindo *s=-3+4j*, temos

=> . Logo,

Os coeficientes e são conjugados complexos dos coeficientes e , portanto e . Conclui-se que , pode ser representada por . A transformada inversa de Laplace de *F(S)* será dada por: . Desenvolvendo a expressão em *“t”*, temos .

**# Caso 5 – Função racional imprópria**

1. Divide-se o numerador pelo denominador até que o resto da divisão seja uma função racional própria;
2. Para a função racional própria obtida aplica-se um dos procedimentos anteriormente descritos de acordo com as raízes do denominador da identidade .

Exemplo: Considere a função . Trata-se de uma função racional imprópria, logo, devemos proceder a divisão do numerador da função pelo seu denominador. O quociente da divisão gera a função e um resto , portanto, .

1. Determinação de *k1*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s=-4*, temos

=> . Logo,

1. Determinação de *k2*:

Multiplicando , por , temos

. Substituindo na identidade *s=-5*, temos

=> . Logo,

Conclui-se que , pode ser representada por . A transformada inversa de Laplace de *F(S)* será dada por: .

**## Teorema do valor Inicial e Final**

A partir dos teoremas do valor inicial e final é possível determinar o valor de uma dada função *f(t)*, para *t=0* e o seu valor de regime (*t*) usando a transformada de Laplace da função *f(t)*. Com os teoremas que serão apresentados a seguir, é possível realizar a análise de circuitos no domínio *“S”* e a partir das expressões determinadas nesse domínio, avaliar o comportamento inicial e de regime das grandezas cujas expressões foram determinadas, sem a necessidade de calcular a transformada inversa de Laplace dessas expressões.

**# Teorema do valor inicial**

A aplicação do teorema do valor inicial não pode ser aplicado a funções que apresentem uma função impulso na origem. Para verificar se a função apresenta um impulso na origem a partir da respectiva transformada de Laplace, ou seja, a partir da , deve-se avaliar se a função possui algum termo constante, caso sim, isso indica que a função apresenta um impulso na origem.

O cálculo do limite do teorema do valor inicial, quando a função possui um impulso na origem, tenderá para infinito, ou seja, não é determinado.

Demonstração:

Quando , , logo , assim

como

e é independente de *s*, então

assim

**# Teorema do valor final**

O teorema do valor final não pode ser aplicado a funções cujas raízes de *D(s)* estejam localizadas no semi-plano esquerdo do plano complexo em *S*. A função *F(s)*, no entanto, poderá apresentar uma única raiz na origem do plano *S*. Caso *F(s)* seja uma função racional própria e *D(s)* seja uma função de segunda ordem, se *D(s)* apresentar uma raiz complexa conjugada com parte real nula, o cálculo realizado a partir do teorema do valor final para está função racional resultará no valor médio de regime da função, visto que, no caso em tela, a função apresentará oscilação permanente em regime.

Demonstração:

como independe de *t* e *s*

assim

**## Função de Transferência**

A função de transferência de um circuito representa a relação entre uma grandeza (ou conjunto de grandezas) de excitação do circuito e uma grandeza gerada a partir dessa excitação (ou conjunto de excitações), como por exemplo, uma corrente ou uma tensão em um ramo ou componente do circuito. A determinação da função de transferência ocorre **EXCLUSIVAMENTE** no domínio *S* e na sua determinação as condições iniciais daqueles componentes do circuito capazes de armazenar energia (indutores e/ou capacitores) devem, **OBRIGATORIAMENTE,** ser desprezadas.

A função de transferência de um circuito e/ou sistema, define o tipo de comportamento transitório que o mesmo apresentará, por exemplo, quando foram estudados os circuitos de 2a ordem foram identificados três tipos de comportamentos transitórios: i)super-amortecido, ii) criticamente amortecido e iii) sub-amortecido. Também recordando o estudo dos circuitos de 2a ordem, verificou-se que o tipo de comportamento transitório dependia apenas dos valores dos componentes que compunham o circuito e não das condições iniciais de capacitores e/ou indutores. Assim, justifica-se o porque das condições iniciais dos componentes armazenadores de energia deverem ser desprezadas na determinação da função de transferência de um dado circuito ou sistema, esta deverá exprimir o comportamento do circuito ou sistema e não uma condição particular de operação, denotada por sua condição inicial.

A função de transferência é genericamente definida como sendo a razão entre uma saída e uma entrada, no domínio *S*, representada pela função:

onde, representa a saída observada e representa a entrada de excitação (ou conjunto de entradas). As raízes do denominador da função são denominados de Pólos de . As raízes do numerador da função são denominados de Zeros de . Os Pólos de determinam o tipo de comportamento transitório do circuito.

Para um dado circuito, pode ser determinado um conjunto de funções de transferência, bastando modificar a escolha da variável de saída a ser observada. Independente da variável de saída selecionada é possível mostrar que os Pólos de todas as funções de transferência obtidas serão os mesmos, reforçando o fato de que o comportamento transitório, definido pelos Pólos de , é igual para todas as grandezas que venham a ser geradas pelo circuito/sistema. Outra condição que precisa ser salientada é que quando o circuito/sistema é excitado por mais de uma fonte de excitação, a componente deverá representar o conjunto das excitações, assim, para determinação de pode ser necessário o uso do método da superposição. Usando o método da superposição deverão ser determinadas as componentes de considerando a atuação de cada fonte de excitação individualmente e então realizando a soma das componentes obtidas, calcular a expressão global de .

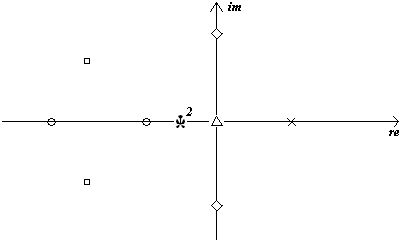
**# Localização de Pólos e Zeros de**

A partir da localização dos Pólos de no plano complexo de *S* é possível determinar além do tipo de resposta transitória que o sistema apresentará, também se o mesmo apresentará uma resposta finita quando excitado por uma fonte de excitação limitada (valores dentro de valores limites e finitos). Para apresentar uma resposta finita os Pólos de devem estar localizados no semi plano esquerdo do plano complexo *S* (raízes reais ou partes reais de raízes complexas com sinal negativo). Se houver um Pólo na origem, o circuito/sistema apresentará um comportamento de integrador, ou seja, se a esse circuito/sistema for aplicado um sinal do tipo degrau, a saída tenderá para quando . Se o circuito/sistema apresentar um par de Pólos complexos com parte real nula, o circuito/sistema oscilará de forma permanente. Se o circuito/sistemas apresentar pelo menos um Pólo no semi plano direito do plano complexo em *S*, mesmo para uma excitação limitada, a saída do circuito/sistemas tenderá para quando .

Os zeros de podem se localizar em qualquer posição do plano complexo em *S*.

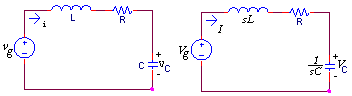
Na figura abaixo, considerando que as marcações representam os Pólos de funções de transferência que representam circuitos de 1a ordem e 2a ordem, percebe-se que:

1. O circuito cujos Pólos de são representados por círculos apresenta dois Pólos reais distintos no semi plano esquerdo do plano complexo em *S*, logo, trata-se de um circuito que apresenta resposta em regime limitada e resposta transitória do tipo super-amortecida;
2. O circuito cujos Pólos de são representados por quadrados apresenta dois Pólos complexos conjugados no semi plano esquerdo do plano complexo em *S*, logo, trata-se de um circuito que apresenta resposta em regime limitada e resposta transitória do tipo sub-amortecida;
3. O circuito cujos Pólos de são representados por losangos apresenta dois Pólos complexos conjugados sobre o eixo *re=0* do plano complexo em *S*, logo, trata-se de um circuito que apresenta resposta em regime limitada e resposta transitória do tipo super-amortecida com oscilação permanente;
4. O circuito cujos Pólos de são representados por astericos apresenta dois Pólos reais idênticos no semi plano esquerdo do plano complexo em *S*, logo, trata-se de um circuito que apresenta resposta em regime limitada e resposta transitória do tipo criticamente amortecida;
5. O circuito cujo Pólo de é representado pelo triângulo na origem do plano complexo em *S*, apresenta resposta em regime limitada, apenas se a entrada for limitada e finita;
6. O circuito cujo Pólo de é representado pelo “x” no semi plano direito do plano complexo em *S*, apresenta resposta em regime ilimitada, mesmo se a entrada for limitada e finita;



**# Exemplo de determinação de**

Considere o circuito apresentado a seguir, onde estão representados os circuitos no domínio do tempo e no domínio *S*.



Serão determinadas duas funções de transferência, uma relacionando a saída e a entrada e uma segunda relacionado a saída e a entrada .

Aplicando a LKT ao circuito representando no domínio *“S”*, temos

A partir da expressão da corrente que pode ser obtida das expressões acima temos

A tensão no capacitor será dada por:

então

Pode ser observado que em ambas as expressões de o denominador foi repetido, como havia sido discutido anteriormente.

**# Função de Transferência em frações parciais**

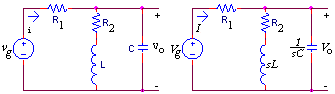
A partir da função de transferência de um circuito e do conhecimento da transformada de Laplace da excitação do circuito é possível determinar a expressão de , onde . Expandindo a expressão de em frações parciais obtém-se uma fração para cada Pólo de e de .

* Os Pólos de determinarão o comportamento transitório da reposta global e;
* Os Pólos de determinarão o comportamento de regime da resposta do circuito.

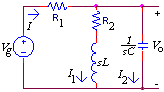
Exemplo: Considere o circuito a seguir, cujas representações no domínio do tempo e no domínio são apresentadas.

Dados: *R1*=1KΩ, *R2*=250Ω, *L*=50mH, *C*=1µF.

Considere:



Para o circuito acima, será determinada a função de transferência , que relaciona a tensão de saída e a tensão de entrada . Vários métodos de análises podem ser aplicados. Adotaremos a análise por tensões de nós, visto que a tensão será a própria tensão de nó a ser determinada.



Considerando as correntes *I1* e *I2* definidas, além da corrente original *I*, a expressão das correntes de nó será dada por: (correntes entrando no nó +)

. Substituindo os termos em corrente pelas respectivas expressões obtidas a partir da lei de Ohm, temos

Isolando a tensão , temos

, logo

, simplificando a expressão,

, substituindo os valores dos componentes,

. As raízes do denominador de são e . Trata-se de um sistema de segunda ordem com resposta sub-amortecida.

Aplicando ao circuito a entrada , obtém-se a seguinte equação para a tensão de saída :

.

A expressão de resultante é uma função racional própria, assim, aplicando a expansão em frações parciais a mesma, obtemos a seguinte soma de frações:

. Os Pólos de determinarão o comportamento transitório da tensão de saída , enquanto o Pólo de determinará o comportamento de regime de .

Os valores de , e são, respectivamente, , e . Dessa forma, . A transformada inversa de Laplace de será: